# Mestrados

## Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto
Gab 506 Quelhas
Telef 213 925 845
Email: lspinto@iseg.ulisboa.pt

Aulas Multiobjetivo – otimização vetorial.

Otimização Multiobjetivo otimização vetorial.

STFA: exercícios da folha.

1.Determinação de soluções eficientes

1.1. Conceitos e propriedades
1.2. Determinação gráfica de todas as soluções eficientes

Bibliografia:
Eiselt, H.A.; Pederzoli, G; Sandbloom, C.L.; *'Continuous Optimization Models'*, Walter de Gruyter, New York, 1987.
Steuer, R.E.; *'Multiple Criteria Optimization'*, John Wiley & Sons, New York, 1986

Um **Problema de Otimização Vetorial** é um problema de PL em que, em vez de se ter uma única função objetivo, se têm várias funções objetivo, não hierarquizáveis nem comparáveis.

**HIP:** Todos os objetivos são de maximização

$$\max\ z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n$$

$$\max\ z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n$$

$$\ldots$$

$$\max\ z_r = c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \ldots + c_{rn}x_n$$

$$s.a: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

## em notação matricial

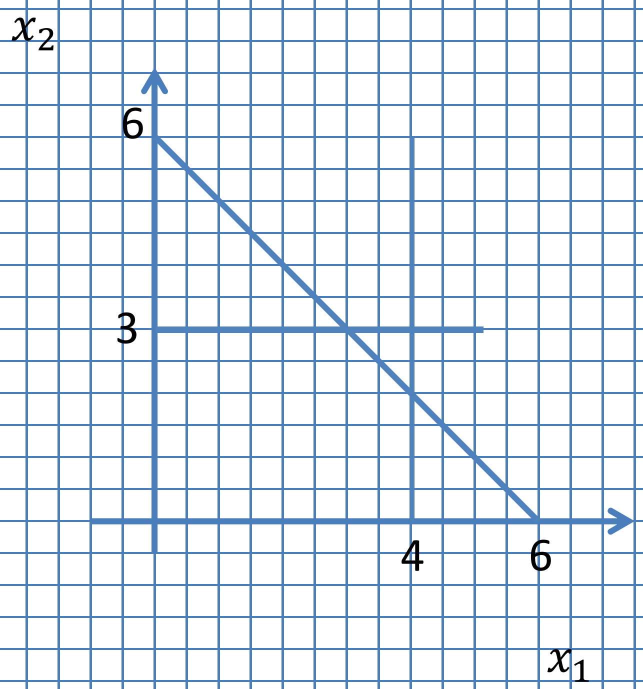
$$\begin{aligned} \max\ z &= Cx \\ s.a \quad & x \in S \end{aligned} \quad , \ com \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & & \dots & \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1.} \\ c_{2.} \\ \dots \\ c_{r.} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e, sendo $S$ definido por restrições lineares,

$$\begin{aligned} \max\ z &= Cx \\ s.a: \quad & Ax \le b\,, \\ & x \ge 0 \end{aligned} \quad com \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

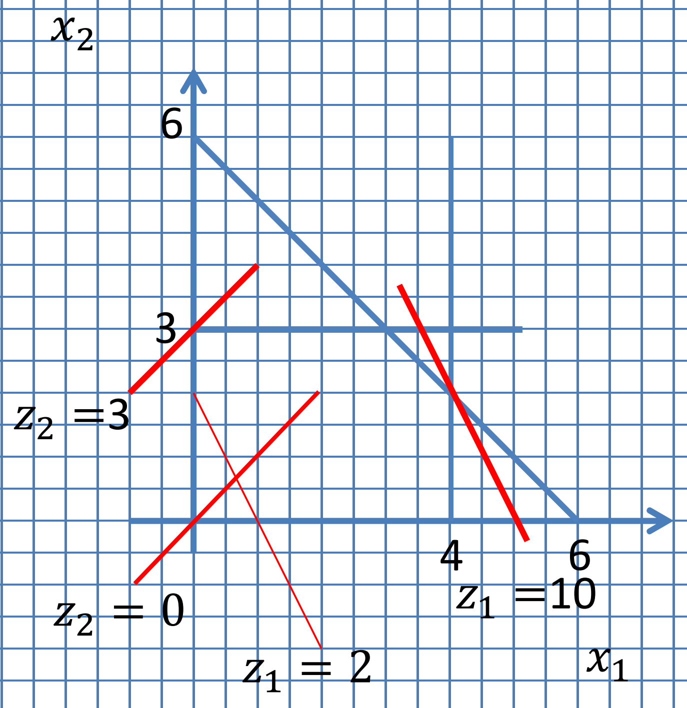


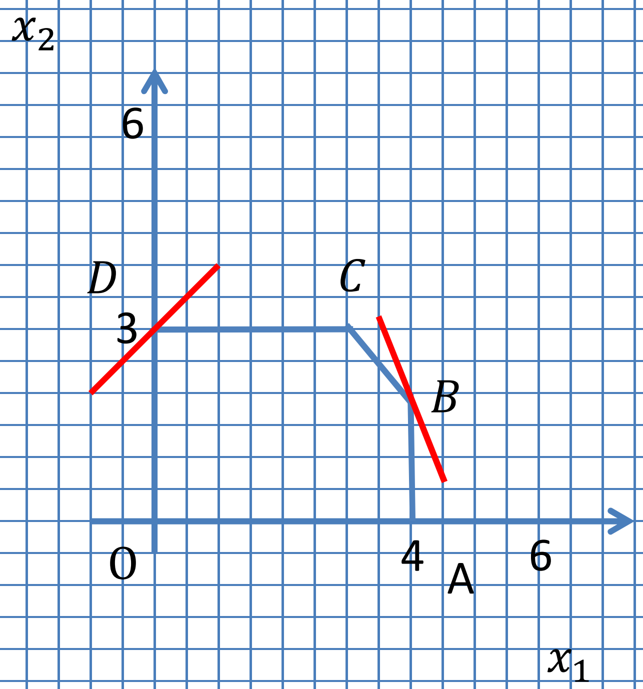

$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

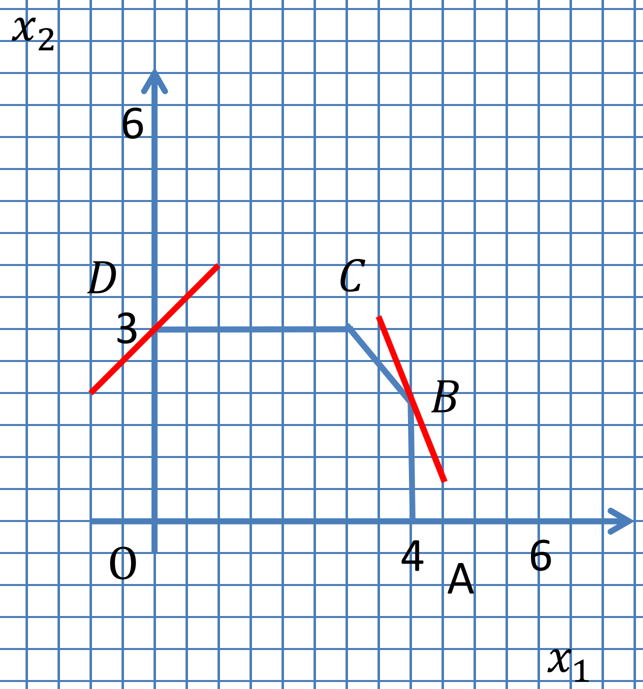
$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$






$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$




$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

Os pontos em $\overline{DC}$ e $\overline{CB}$ são pontos eficientes

**Obs:** Uma vez que as funções objetivo são, em geral, conflituosas entre si, não existe solução ótima no sentido habitual.

Há, no entanto, um conjunto de soluções 'privilegiadas'.

**Def:** Uma solução admissível *x'* diz-se ***eficiente*** (ou ***solução ótima de Pareto*** ou ***solução não inferior*** ) se não existe outra solução admissível *x* tal que

$$z_i(x) \geq z_i(x'), \quad \forall i = 1,\dots,r$$

$$z_k(x) > z_k(x'), \quad \text{para pelo menos um } k \in \{1,\dots,r\}.$$

isto é, se não existir outra solução *x*, pelo menos tão boa como *x'* em todos os objetivos e estritamente melhor em pelo menos um objetivo.

**Prop:** O conjunto das soluções eficientes de um P.O.V. é um conjunto conexo

Solução Ótima em PL (1 objetivo) → Solução Eficiente em O.V.,

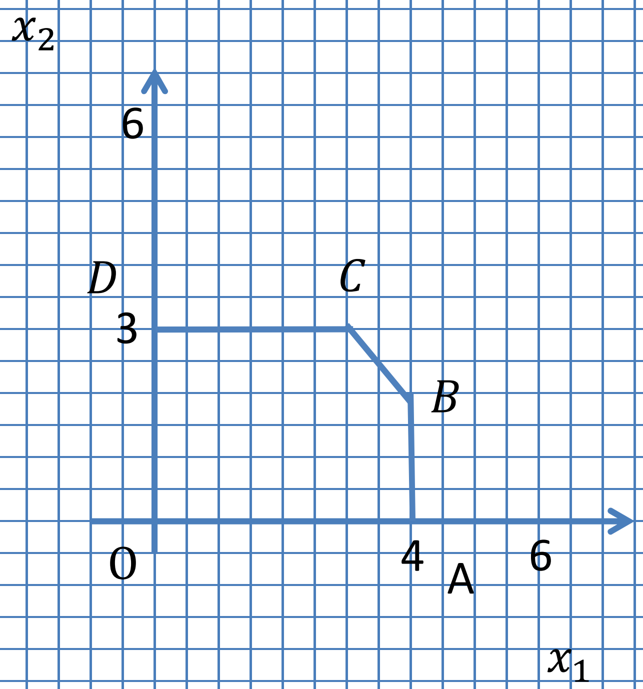
resolver um P.O.V. requer

(i) Cálculo de soluções eficientes

(ii) 'Avaliação' das soluções eficientes.

**Obs**: cada $x = (x_1, \dots, x_n)$ do espaço das variáveis corresponde a um $z = (z_1(x), \dots, z_r(x))$ do espaço dos objetivos.

Assim, ***a região admissível no espaço dos objetivos*** é o conjunto das imagens de todas as soluções admissíveis(no espaço das variáveis).



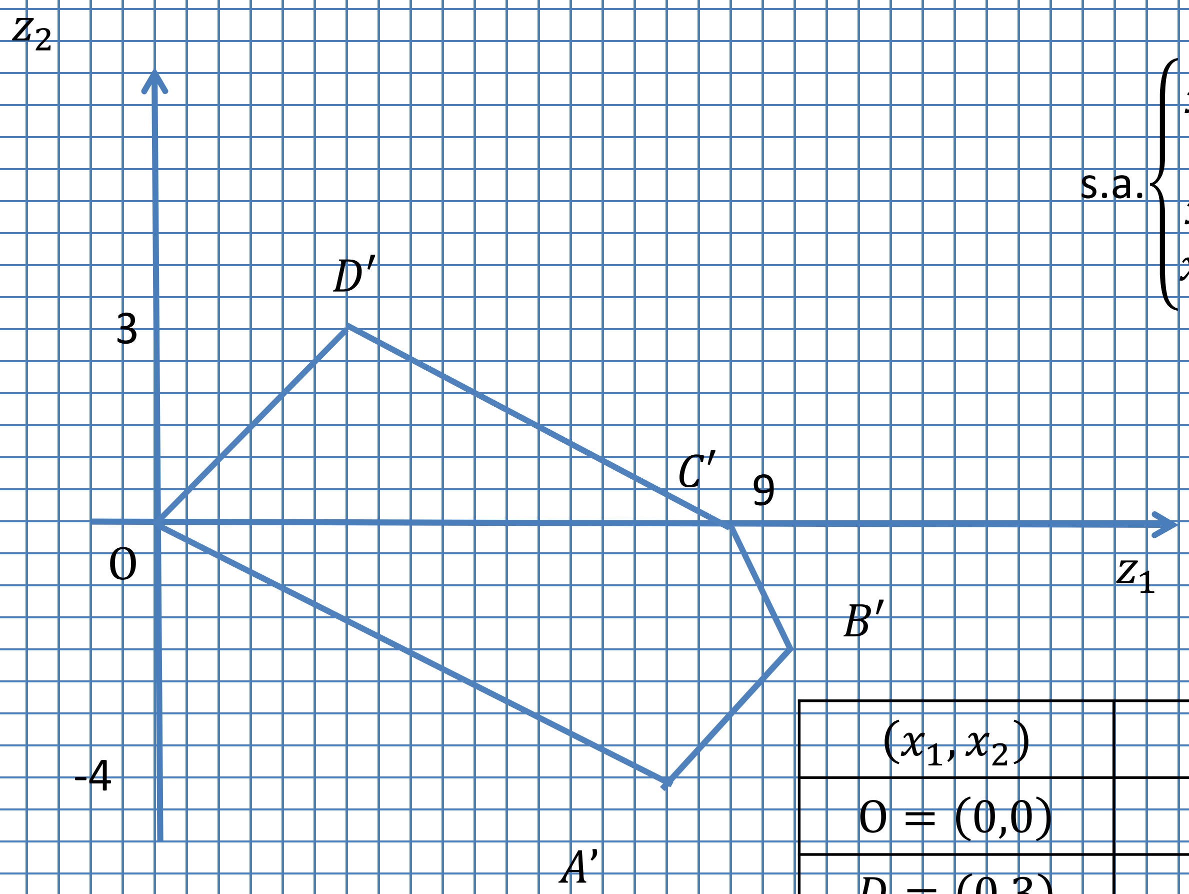

$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

| $(x_1, x_2)$ | $z_1$ | $z_2$ |
|---|---|---|
| $O = (0,0)$ | 0 | 0 |
| $D = (0,3)$ | 3 | 3 |
| $C = (3,3)$ | 9 | 0 |
| $B = (4,2)$ | 10 | $-2$ |
| $A = (4,0)$ | 8 | $-4$ |

$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$




| $(x_1, x_2)$ | $z_1$ | $z_2$ |
|---|---|---|
| $O = (0,0)$ | $0$ | $0$ |
| $D = (0,3)$ | $3$ | $3$ |
| $C = (3,3)$ | $9$ | $0$ |
| $B = (4,2)$ | $10$ | $-2$ |
| $A = (4,0)$ | $8$ | $-4$ |

Os pontos em $\overline{D'C'}$ e $\overline{C'B'}$ são pontos não dominados

**Prop:** cada vértice da região admissível no espaço das variáveis corresponde a um vértice da região admissível no espaço dos objetivos.

Ex.

**Def:** Um ponto $z = (z_1(x'), z_2(x'), \dots, z_r(x'))$ admissível no espaço dos objetivos diz-se ***não dominado*** se $x'$ for uma solução eficiente.

Ex.

**Obs:** num P.O.V, os pontos não dominados são os que formam o canto superior direito do politopo que define a região admissível, no espaço dos objetivos (se ambos os objetivos forem de max)

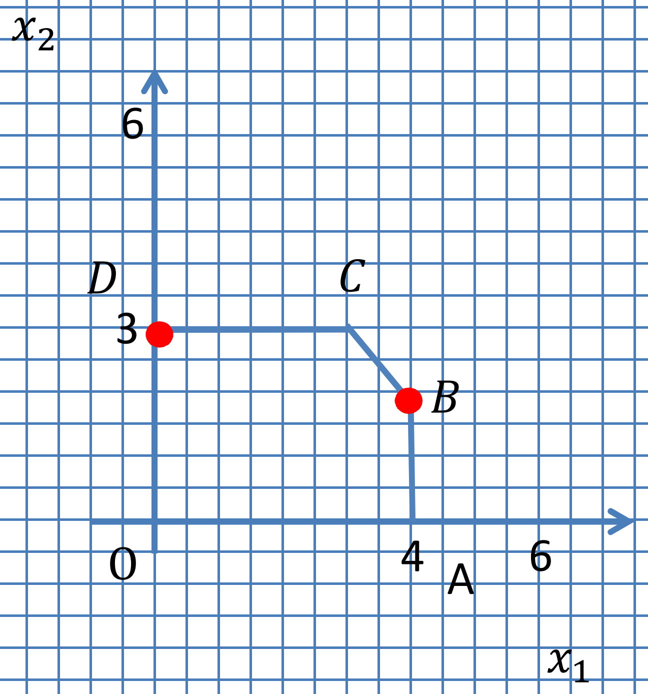
Seja $x^i* =$ solução ótima do objectivo $i$,

(otimizado individualmente)

**Tabela de Payoff**

| | $z_1$ | $z_2$ | $\ldots$ | $z_r$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^1*$ | $z_1(x^1*)$ | $z_2(x^1*)$ | | $z_r(x^1*)$ |
| $x^2*$ | $z_1(x^2*)$ | $z_2(x^2*)$ | | $z_r(x^2*)$ |
| $\ldots$ | | | $\ldots$ | |
| $x^r*$ | $z_1(x^r*)$ | $z_2(x^r*)$ | | $z_r(x^r*)$ |

Ex.




$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

| $(x_1, x_2)$ | $z_1$ | $z_2$ |
|---|---|---|
| $O = (0,0)$ | $0$ | $0$ |
| $\boldsymbol{D = (0,3)}$ | $\mathbf{3}$ | $\mathbf{3}$ |
| $C = (3,3)$ | $9$ | $0$ |
| $\boldsymbol{B = (4,2)}$ | $\mathbf{10}$ | $\mathbf{-2}$ |
| $A = (4,0)$ | $8$ | $-4$ |

# Tabela de payoff exemplo



| $(x_1, x_2)$ | $z_1$ | $z_2$ |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{x^{1*} = (4, 2)}$ | $\mathbf{10}$ | $\mathbf{-2}$ |
| $\boldsymbol{x^{2*} = (0, 3)}$ | $\mathbf{3}$ | $\mathbf{3}$ |

Ponto de ideal $(10{,}3)$

Ponto de Nadir $(3, -2)$

**Def:** ***Ponto ideal***

é um ponto z*, no espaço dos objetivos, cujas componentes são o ótimo de cada função objetivo.

Ex.

**Obs:** Em geral, o ponto ideal não pertence à região admissível no espaço dos objetivos (se pertencer )
As suas coordenadas são ... da tabela de payoff.

**Def:** ***Ponto nadir***

($\underline{z}$) é um ponto no espaço dos objetivos, cujas coordenadas são

$$\underline{z} = (\min_{1 \le i \le r} z_1(x^i*), \min_{1 \le i \le r} z_2(x^i*), \dots, \min_{1 \le i \le r} z_r(x^i*))$$

**Obs:** As suas coordenadas são ... da tabela de payoff.

$\tilde{x} \in S$ diz-se <u>fracamente eficiente</u>

se não existe outra solução $x \in S$ tal que

$$z_i(x) > z_i(\tilde{x}), \quad \forall i = 1, \ldots, r$$

**Obs1:** Apesar de qualquer solução eficiente ser fracamente eficiente, em geral chama-se fracamente eficiente às que são fracamente eficientes mas não são eficientes;

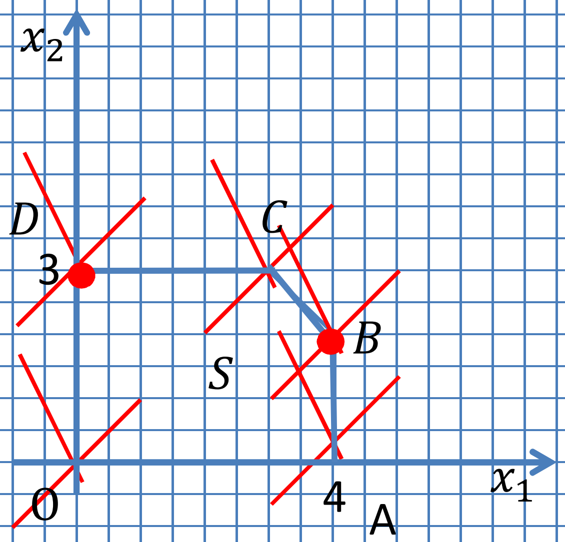
**Obs2:** Um ponto extremo de S que seja solução ótima única de um dos objetivos é uma solução eficiente (se não for única, poderá ser apenas fracamente eficiente).

**Def:** Dado um ponto *x′*, se traçarmos as curvas de nível das diferentes funções objetivo que passam em *x′* e intersetarmos os semiplanos onde

$$z_i(x) \geq z_i(x'), \quad \forall i = 1,\ldots, r$$

obtemos o **cone polar em *x′*.**

**Obs:** O cone polar em *x′* é o conjunto de todos os pontos, no espaço das variáveis, que são melhores ou iguais a *x′*, em todos os objetivos.




$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

Ex1

$$\max\ z_1 = 5x_1 + x_2$$
$$\max\ z_2 = -5x_1 + x_2$$

(muito conflito)

Ex2

$$\max\ z_1 = x_1 + 5x_2$$
$$\max\ z_2 = -x_1 + 5x_2$$

(pouco conflito)

Ex3

$$\max\ z_1 = x_1 + x_2$$
$$\max\ z_2 = 2x_1 + 2x_2$$

(nenhum conflito)

Ex4

$$\max\ z_1 = x_1 + x_2$$
$$\max\ z_2 = -x_1 - x_2$$

(conflito total)

# Objetivo redundante

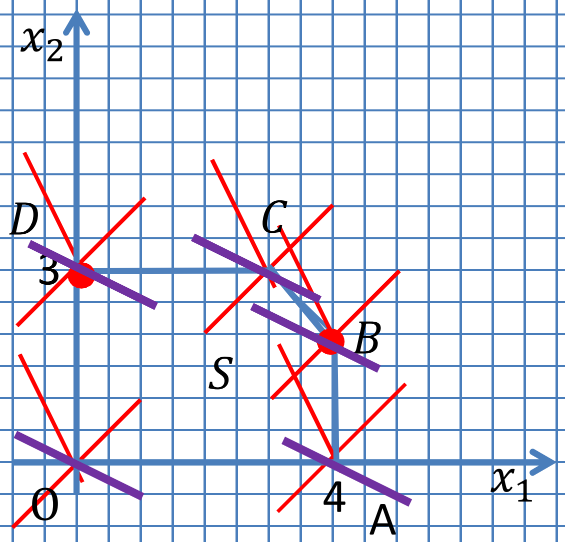
Se algum vetor $c_k, 1 \leq k \leq r$ puder ser escrito como combinação linear **não negativa** dos restantes

Então o objetivo

$$max\ z_k = c_k x$$

Pode ser eliminado por ser redundante.

$$Max\ z_1 = 2x_1 + x_2$$
$$Max\ z_2 = -x_1 + x_2$$
$$\boldsymbol{Max\ z_3 = x_1 + 2x_2}$$




$$\text{s.a.}\begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 & \end{cases}$$

$\boldsymbol{z_3} = z_1 + z_2$

É objetivo redundante

# Método gráfico

para determinação de **todas as soluções eficientes** de um P.O.V com **2 variáveis de decisão**

**1.**Desenhar a região admissível *S*

**2.**Em cada um dos vértices de *S*, construir o cone polar

**3.**Determinar todos os vértices que são soluções eficientes

(um vértice de *S* é uma solução eficiente se a intersecção do seu cone polar com a região admissível *S* for apenas o próprio vértice)

**4.**Unir os vértices eficientes (obtendo uma linha que constitui a região eficiente do P.O.V)

**Obs:** O mesmo processo pode ser aplicado no espaço dos objetivos (se ambos os objetivos forem de maximização, o cone polar na origem coincide com o 1º quadrante e os pontos não dominados são os do canto superior direito)