Soluções dos exercícios de Cálculo Diferencial - I

1. $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{9}$.

2. a) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$; b) $y = x - 1$; c) $y = \frac{1}{60}x + \frac{5}{3}$.

3. a) $\text{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; b) $\text{argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\text{argsinh}'(0) = 1$.

4. –

5. São 4 zeros. O Teorema de Rolle garante que existem pelo menos 4 (entre os 5 zeros de f). O facto de f' ser uma função polinomial de grau 4 (porque f é uma função polinomial de grau 5) garante que são no máximo 4.

6. —

7. —

8. De maneira geral, a derivada logarítmica de $\frac{n(x)}{p(x)}$ é igual a $\frac{n'(x)}{n(x)} - \frac{p'(x)}{p(x)}$, como visto nas aulas teóricas. Assim,

   a) $\frac{2x}{2+x^2} + \frac{1}{2-x}$; b) $\frac{-\sqrt{2}x^{-\frac{3}{4}}}{4(1-\sqrt{2}\sqrt[4]{x})} - \frac{12x^3}{1+3x^4}$; c) $\frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2}$;

   d) $\frac{6x+3x^2-9}{3x^2+x^3-9x+4} - \frac{1}{x-1}$; e) $1 - \frac{e^x}{1+e^x}$; f) $\frac{4ax^3-b}{ax^4-bx} - \frac{x}{x^2+1}$;

   g) $\frac{3}{x} + \frac{1}{x\ln(x)}$; h) $\frac{5}{x} - \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$; i) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - x\ln(x)}$; j) $\frac{-e^{-x}-1}{e^{-x}-x} - \frac{1+x}{x}$.

9. —

10. —

11. —

12. —

13. —

14. —

15. a) n ; b) αx ; c) $5x+2$; d) $\frac{1}{\ln(x)} + x\tan(x)$; e) $3 + 2x - 2x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$;

    f) $\frac{6x^6}{5+x^6}$; g) $\frac{6xe^{3x}-5}{2e^{3x}-5\ln(x)}$; h) $-2x\tan(x) - 5$; i) $7x\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{2}{\ln(x)}$.

16. $p_0 = 250$.

17. b) $-\frac{7}{23}$; É conveniente aumentar o preço de venda.

18. —

19. a) $e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$; b) $\frac{1}{3}$ (corrigir o denominador: $\sin(3x-3)$; c) $\frac{5}{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{a}{b}$; f) 1; g) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$; h) $\frac{3}{5}$; i) $\frac{1}{5}$; j) 0;

    l) Não existe (os limites laterais são distintos); m) $-\frac{2}{3}$; n) 1; o) $\sqrt{e}$; p) $e^{-\frac{1}{6}}$.

20. (a)

(i) $P_1(x) = 1 + x$, $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

(ii) $P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$, $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 = \frac{15}{8} - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}x^2$.

(iii) $P_1(x) = x - 1$, $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 = -\frac{3}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2$.

(iv) $P_1(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) = 2 + \frac{1}{8}x$, $P_2(x) = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{512}(x-16)^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{16}x - \frac{1}{512}x^2$.

(c) $\ln(1.1) \approx 0.095$; $\sqrt[10]{e} \approx 1.105$; $\frac{1}{\sqrt{0.8}} \approx 1.115$; $\sqrt{17} \approx \frac{2111}{512}$.

21.

(a) $\sqrt{x} = 4 + \frac{1}{8}(x-16) - \frac{1}{8c^{\frac{3}{2}}}(x-16)^2$, $c \in]16; x[$.

22.

(a) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}e^c x^3$.

(b) $\ln(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3c^3}(x-1)^3$, $c \in]1; x[$.

(c) $e^{\frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{6000}e^c$, $c \in]0; \frac{1}{10}[$. Assim $\left|e^{\frac{1}{10}} - \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}\right)\right| \le \frac{e^c}{6000} \le \frac{e^{\frac{1}{10}}}{6000} \le \frac{1}{4000}$,
onde se tomou, por exemplo, $e^{\frac{1}{10}} \le 3^{\frac{1}{0}} \le \frac{3}{2}$.

$\ln(1.1) = 0.1 - \frac{1}{2}0.1^2 + \frac{1}{3c^3}0.1^3$, $c \in]1; 1.1[$. Assim, $|\ln(1.1) - (0.1 - \frac{1}{2}0.1^2)| = \frac{0.1^3}{3c^3} \le \frac{1}{3000}$.

23.

(a) $n = 3k$ é múltiplo de 3, $e^{x^3} = P_{3k}(x) + x^{3k}\epsilon(x^{3k})$, onde

$$P_{3k}(x) = 1 + x^3 + \frac{1}{2!}x^6 + \frac{1}{3!}x^9 + \cdots + \frac{1}{(3k)!}x^{3k}.$$

Para $n = 3k+1$, $e^{x^3} = P_{3k}(x) + x^{3k+1}\epsilon(x^{3k+1})$, isto é, $P_{3k+1} = P_{3k}$.
Para $n = 3k+2$, $e^{x^3} = P_{3k}(x) + x^{3k+2}\epsilon(x^{3k+2})$, isto é, $P_{3k+2} = P_{3k}$.

(b) Para todo o n,

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}x^n + x^n\epsilon(x^n).$$

(c) Se $n = 2k$ é par,

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + x^{2k}\epsilon(x^{2k}).$$

Se $n = 2k+1$ é ímpar,

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + x^{2k+1}\epsilon(x^{2k+1}),$$

isto é, $P_{2k} = P_{2k+1}$.

(d) Se $n = 2k-1$ é par,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2k-1}\epsilon(x^{2k-1}).$$

Se $n = 2k$ é par,

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + x^{2k}\epsilon(x^{2k}),$$

isto é, $P_{2k} = P_{2k-1}$.

24.

(a) $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, maximizante local; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, minimizante local;

(b) -1, maximizante local; 2, minimizante local;

(c) 1, maximizante local; 3, minimizante local;

(d) -1, maximizante local; 1, minimizante local;

(e) Sem pontos críticos;

(f) 1, maximizante local;

(g) $\frac{1}{\ln 3}$, maximizante local;

(h) Sem pontos críticos;

(i) -1, minimizante local;

(j) e^{-1}, minimizante local;

(k) $-3-\sqrt{10}$, maximizante local; $-3+\sqrt{10}$, minimizante local; 1 e -1, pontos de sela;

(l) 1 e 3, maximizantes locais; $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, minimizantes locais.

25.

(a) Sem pontos de inflexão;

(b) Sem pontos de inflexão;

(c) 0;

(d) 3, -3, $-\frac{3}{\sqrt{5}}$, $\frac{3}{\sqrt{5}}$;

(e) $-2\sqrt{3}$, 0, $2\sqrt{3}$;

(g) -2;

(h) $-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}$;

(i) Sem pontos de inflexão;

(k) Sem pontos de inflexão;

(l) -5 e $\frac{1}{2}$.