Mestrados

Métodos Quantitativos para DEE

2018/2019

Leonor Santiago Pinto
Gab 506 Quelhas
Telef 213 925 845
Email: lspinto@iseg.ulisboa.pt

Aulas Programação Não Linear.

Programação Não Linear.

STFA: exercícios no final da apresentação

Programa

1. Tópicos de Investigação Operacional
    1. O Modelo de Programação Linear
    2. Dualidade e Análise de Sensibilidade
    3. Problemas de Transportes e Afetação
    4. Programação Linear Inteira
2. Teoria de Jogos
3. Programação Multiobjetivo
4. Programação não Linear
    1. **Formulação de problemas**
    2. **Resolução gráfica e pelo *Solver/Excel*.**

No Capítulo 1 vimos

Hipóteses fundamentais de PL:

H1) Proporcionalidade: a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é **proporcional** ao nível da atividade

(a contribuição de cada variável para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é proporcional ao valor da variável)

H2) Aditividade: a contribuição de cada atividade para o valor da função objetivo, bem como para o primeiro membro das restrições, é **independente** da contribuição das restantes

H3) Divisibilidade: cada variável pode tomar qualquer valor

H4) Certeza: todos os valores dos parâmetros são conhecidos

Em PL todas as funções envolvidas são lineares.

Muitos problemas práticos correspondem a esse modelo, mas outros não.

Em Economia, a não linearidade é a regra e não a exceção

exemplos

preço de venda é função da quantidade procurada $p \to p(x)$

Lucro $P(x) = xp(x) - cx$

Vários produtos $\sum_{j=1}^{n} P_j\left(x_j\right)$ soma de funções não lineares

o custo de transporte tem descontos de quantidade $C_{ij} \to C_{ij}(x_{ij})$

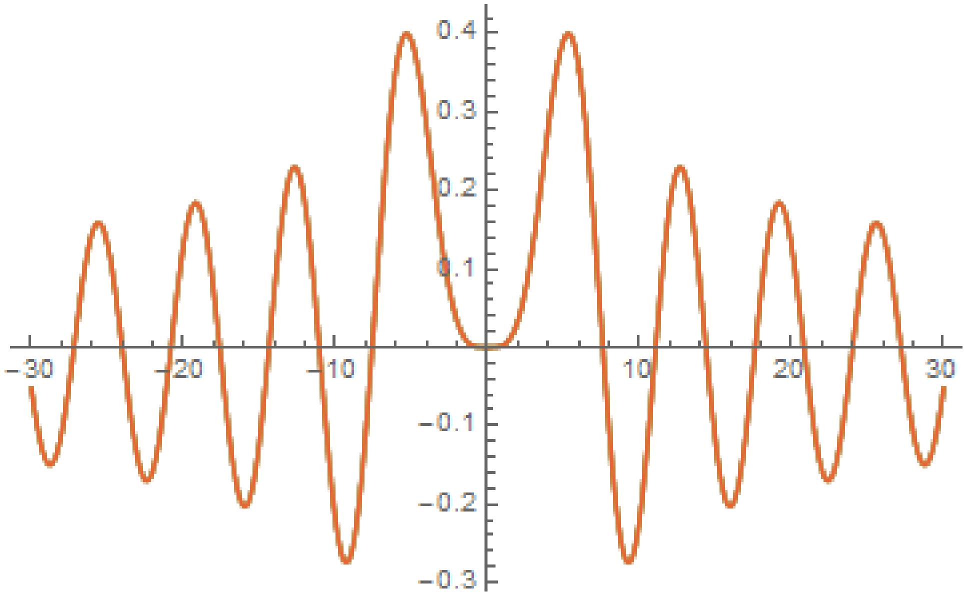
Custo total $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$

Seleção de carteiras

Rendimento esperado da carteira $R(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(x_j\right)$;

Risco associado à carteira $V(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j x_i x_j$;

Ótimos locais



Problema PNL

$$\max \quad z = f(x)$$

$$s.a \quad \begin{cases} g_i(x) \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Obs: diferentes características de $f \ e \ g_i$

=>

diferentes tipos de problemas de PNL

=>

diferentes algoritmos de resolução

Obs: Para alguns destes problemas, mesmo a resolução de pequenos problemas é muito difícil

Tipos de Problemas de PNL

- Otimização sem restrições

- Optimização com restrições lineares
  - Programação Quadrática
    (f.o. quadrática, restrições lineares;
    Bons algoritmos se $\max f$ concava ou min f convexa)
  - ...

- Programação Convexa
  (max $f(x)$ concava e todas $g_i\,(x)$ convexas)

- Programação Separável
  (todas as funções são separáveis,
  $$f(x) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_m(x_m)$$
  $$g_i(x) = gi_1(x_1) + gi_2(x_2) + \cdots + gim(x_m)$$
)

(...)

Problema

$$Max\ f(x)$$

com $f(x)$ real de variável real, diferenciável e côncava.

A condição necessária e suficiente para que máximo global ocorra $x = x^*$ é

$$\frac{df(x)}{dx} = 0 \text{ em } x = x^*$$

Inicialização: Selecionar ε. Determinar $\underline{x}$ e $\overline{x}$ iniciais por inspeção, com $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ e $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$, respetivamente. Solução inicial $x' = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$.

Iteração:

1. calcular $\frac{df(x)}{dx}$ em $x = x'$.

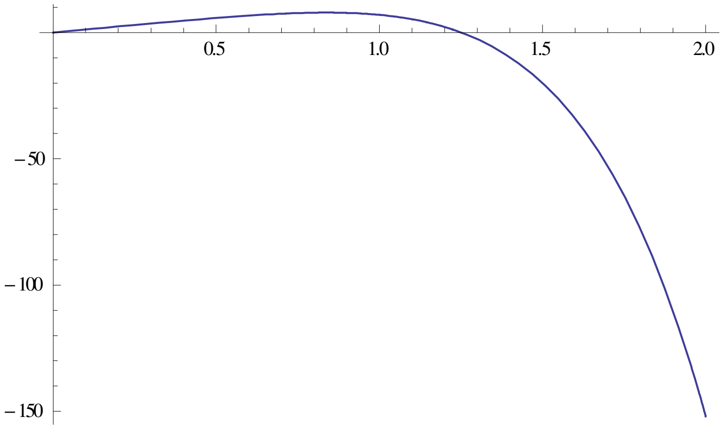
2. Se $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ tomar $\underline{x} = x'$. Caso contrário, tomar $\overline{x} = x'$.

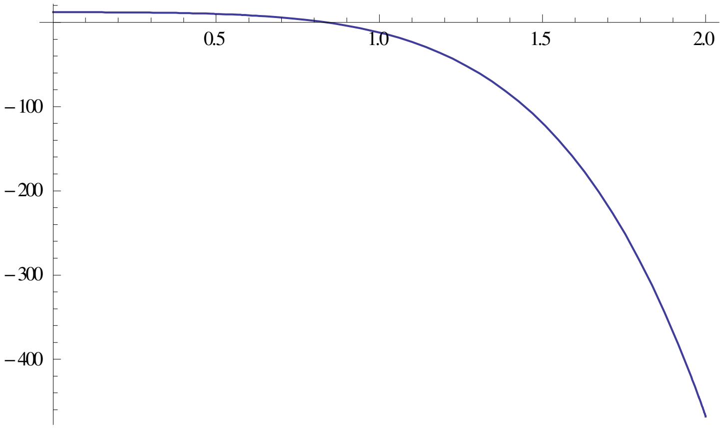
3. Recalcular $x' = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$.

Critério de paragem: se $\overline{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon$ fim. O novo x' está na vizinhança ε de x^*.

Caso contrário voltar a 1.

$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$





$$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$$

$$f'(x) = 12 - 12x^3 - 12x^5 = 12(1 - x^3 - x^5)$$

$$f''(x) = -12(3x^2 + 5x^4) < 0 \text{ côncava}$$

$$f'(0) = 12;\ f'(2) = -152;\ \varepsilon = 0{,}01$$

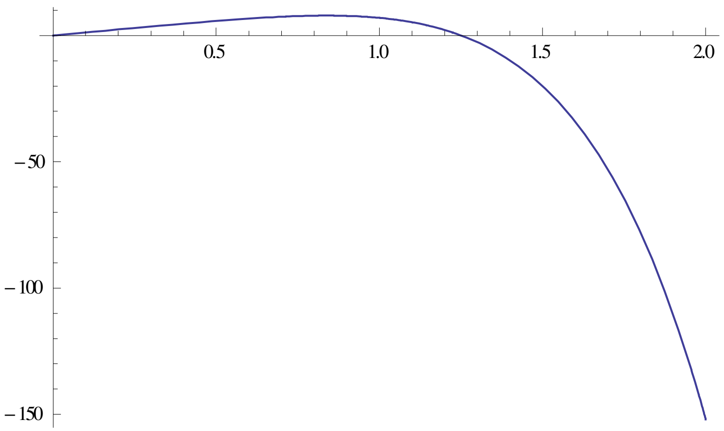
iteração	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\overline{x}$	novo x'	$f(x')$	stop $\varepsilon = 0{,}01$
0		**0**	**2**	1	7	2
1	-12	0	1			
2						
3						
4						
5						
6						
7						

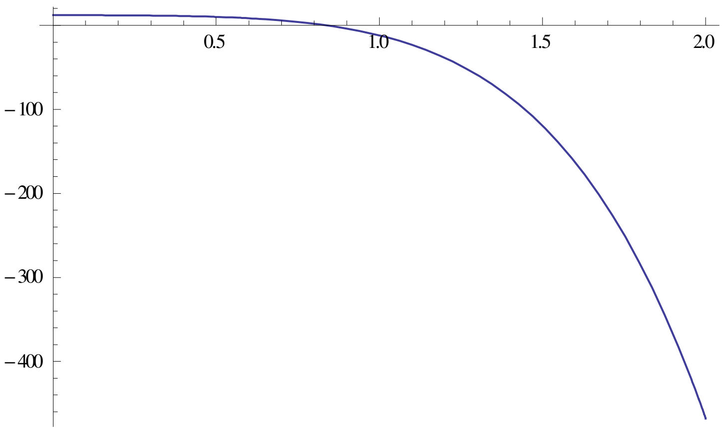
$$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	iteração	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\overline{x}$	novo x'	$f(x')$	stop
2							$\varepsilon = 0{,}01$
3	0		0	2	=(C3+D3)/2	=12*E3-3*E3^4-2*-E3	=D3-C3
4	1	=12*(1-E3^3-E3^5)	=IF(B4>=0;E3;C3)	=IF(B4<0;E3;D3)	=(C4+D4)/2	=12*E4-3*E4^4-2*-E4	=D4-C4
5	2	=12*(1-E4^3-E4^5)	=IF(B5>=0;E4;C4)	=IF(B5<0;E4;D4)	=(C5+D5)/2	=12*E5-3*E5^4-2*-E5	=D5-C5
6	3	=12*(1-E5^3-E5^5)	=IF(B6>=0;E5;C5)	=IF(B6<0;E5;D5)	=(C6+D6)/2	=12*E6-3*E6^4-2*-E6	=D6-C6
7	4	=12*(1-E6^3-E6^5)	=IF(B7>=0;E6;C6)	=IF(B7<0;E6;D6)	=(C7+D7)/2	=12*E7-3*E7^4-2*-E7	=D7-C7
8	5	=12*(1-E7^3-E7^5)	=IF(B8>=0;E7;C7)	=IF(B8<0;E7;D7)	=(C8+D8)/2	=12*E8-3*E8^4-2*-E8	=D8-C8
9	6	=12*(1-E8^3-E8^5)	=IF(B9>=0;E8;C8)	=IF(B9<0;E8;D8)	=(C9+D9)/2	=12*E9-3*E9^4-2*-E9	=D9-C9
10	7	=12*(1-E9^3-E9^5)	=IF(B10>=0;E9;C9)	=IF(B10<0;E9;D9)	=(C10+D10)/2	=12*E10-3*E10^4-2*-	**=D10-C10**
11							
12							

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$





$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$

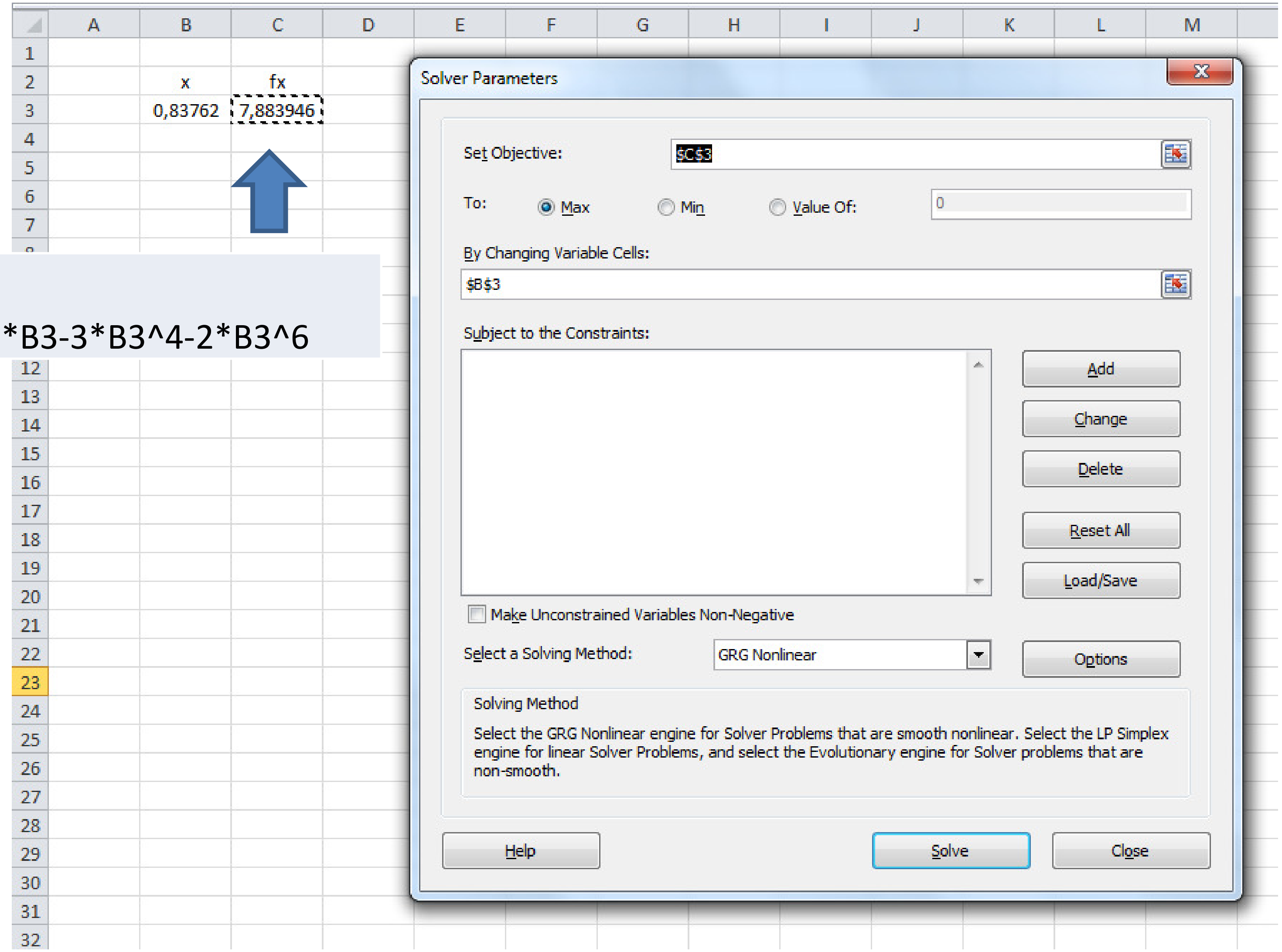
$f'(x) = 12 - 12x^3 - 12x^5 = 12(1 - x^3 - x^5)$

$f''(x) = -12(3x^2 + 5x^4) < 0$ côncava

$f'(0) = 12;\ f'(2) = -152;\ \varepsilon = 0{,}01$

iteração						stop
	$\frac{df(x)}{dx}$	$\underline{x}$	$\overline{x}$	novo x'	$f(x')$	$\varepsilon = 0{,}01$
0		**0**	**2**	1	7	2
1	-12	0	1	0,5	5,781	1,000
2	10,13	0,5	1	0,75	7,695	0,500
3	4,09	0,750	1	0,875	7,844	0,250
4	-2,19	0,750	0,875	0,813	7,867	0,125
5	1,31	0,813	0,875	0,844	7,883	0,063
6	-0,34	0,813	0,844	0,828	7,882	0,031
7	0,51	0,828	0,844	**0,836**	7,884	**0,016**

$$f(x) = 12x - 3x^4 - 2x^6$$



=12*B3-3*B3^4-2*B3^6

Problema

$$Max\ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

com $f(\boldsymbol{x})$ é diferenciável e côncava.

$\boldsymbol{x}$=$x_1, x_2, \dots, x_n$

A condição necessária e suficiente para que máximo global ocorra $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*$ é

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_j} = 0 \text{ para } j = 1,2, \dots, n.$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)$$

$\nabla f(\boldsymbol{x}') = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}\prime)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}\prime)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x}\prime)}{\partial x_n}\right)$ no ponto $x = x'$

Inicialização: Selecionar ε. Determinar solução inicial $\boldsymbol{x}'$.

Iteração:

1. Escrever $f(\boldsymbol{x}' + t\nabla f(\boldsymbol{x}'))$.
2. Determinar $t = t^*$, que resolve $\max_{t>0} f(\boldsymbol{x}' + t\nabla f(\boldsymbol{x}'))$
3. Tomar $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + t^*\nabla f(\boldsymbol{x}')$.

Critério de paragem:

Calcular $\nabla f(\boldsymbol{x}')$ se $\left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x}')}{\partial x_j}\right| \leq \varepsilon$ para $j = 1,2, \dots, n$ fim. O novo $\boldsymbol{x}'$ é a aproximação desejada de $\boldsymbol{x}^*$.

Caso contrário voltar a 1.

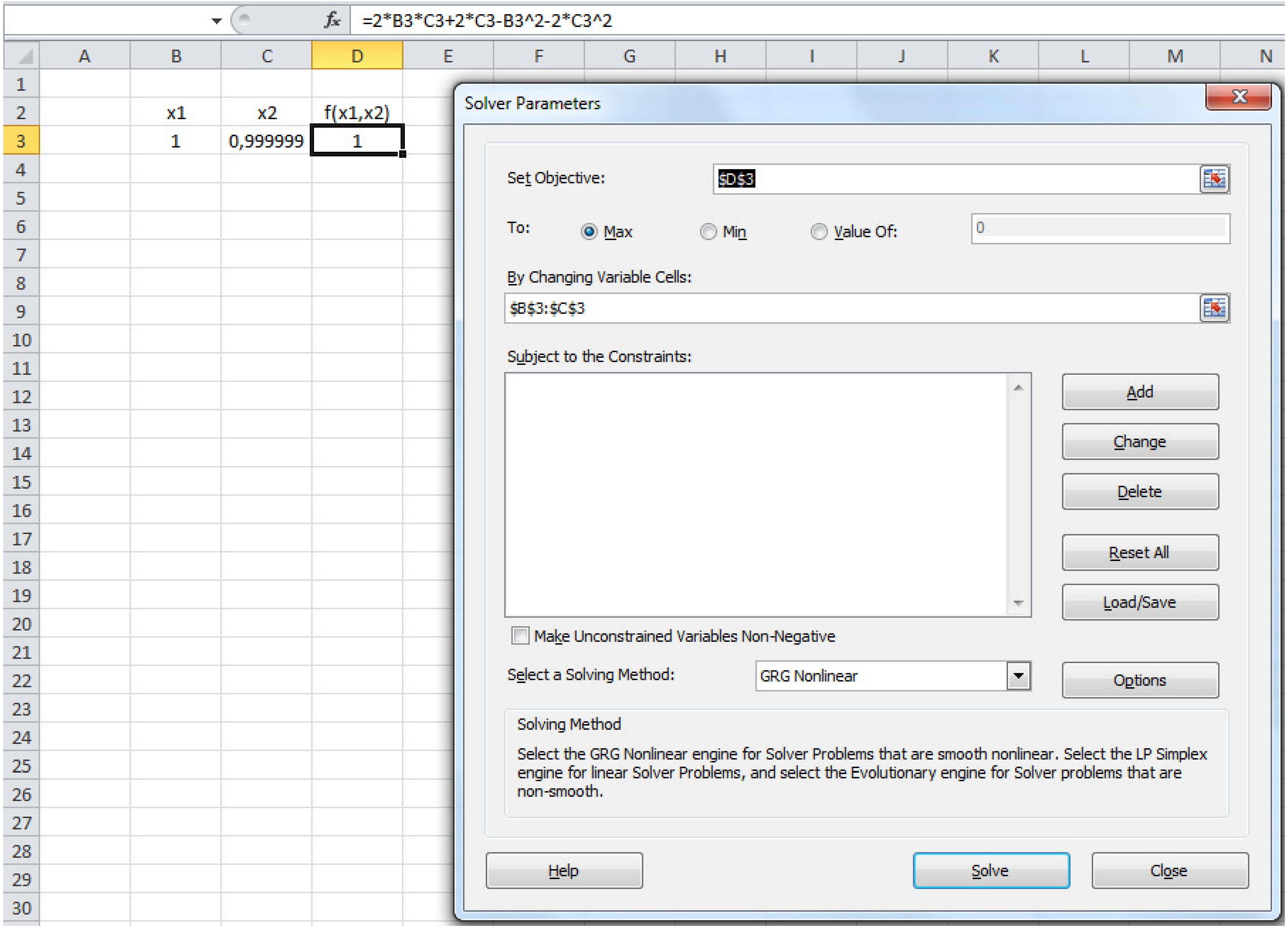
$$f(x) = 2x_1x_2 + 2x_2 - {x_1}^2 - 2{x_2}^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = (2x_2 - 2x_1 \quad , 2x_1 + 2 - 4x_2 \quad)$$

$H = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad H_1 = -2;\ \ H_2 = 4$ Def negativa, função côncava

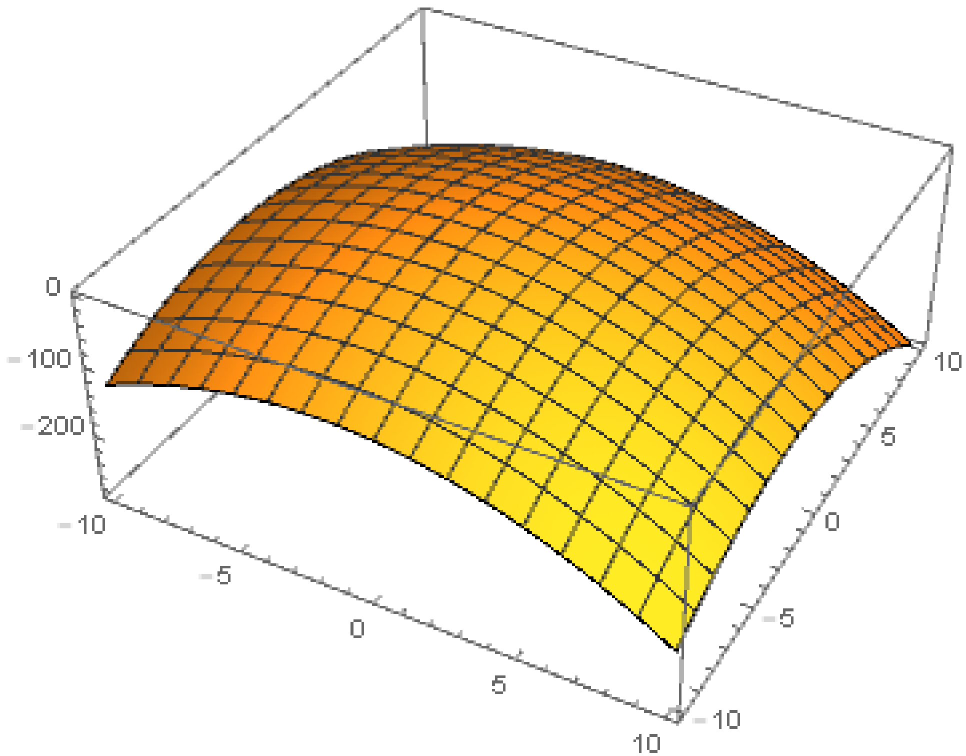
Duas iterações do algoritmo gradiente

iteração	x'	$\nabla f(x')$	$x' + t\nabla f(x')$	$f(x' + t\nabla f(x'))$	t^*	$x' + t^*\nabla f(x')$
1	(0,0)	(0,2)	(0,2t)	4t-8t^2	1/4	(0,1/2)
2	(0,1/2)	(1,0)	(t,1/2)	t-t^2+1/2	1/2	(1/2,1/2)


=2*B3*C3+2*C3-B3^2-2*C3^2
x1
x2
f(x1,x2)
1
0,999999
1
Solver Parameters
Set Objective:
$D$3
To:
Max
Min
Value Of:
0
By Changing Variable Cells:
$B$3:$C$3
Subject to the Constraints:
Add
Change
Delete
Reset All
Load/Save
Make Unconstrained Variables Non-Negative
Select a Solving Method:
GRG Nonlinear
Options
Solving Method
Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.
Help
Solve
Close

Sem Restrições

$$Max\ f(x,y) = -(x+2)^2 - (y+2)^2$$



$$\nabla f(x,y) = [-2(x+2),\ -2(y+2)]$$

$H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ def negativa função côncava

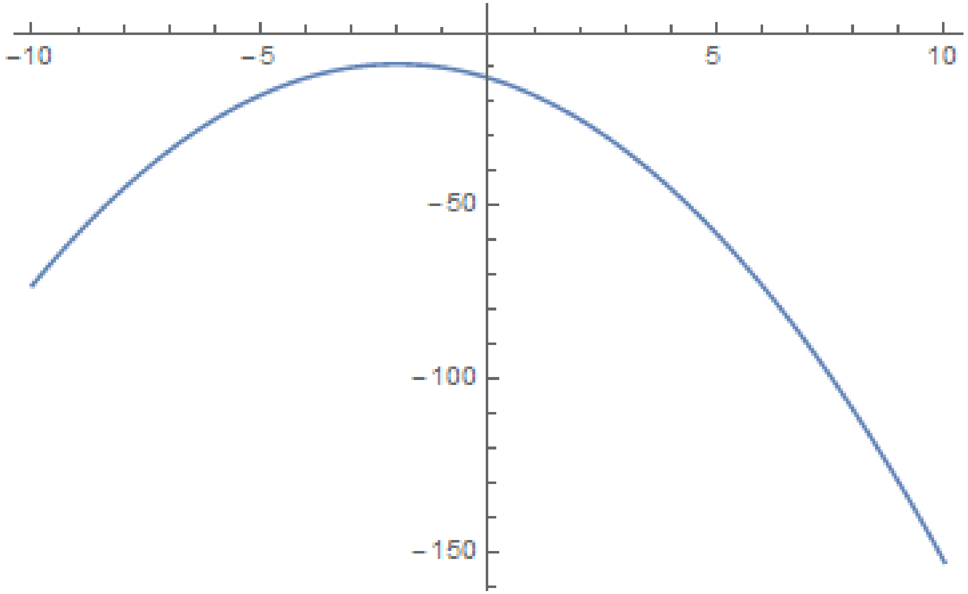
$\nabla f = (0,0)$ é condição necessária e suficiente

de máximo global.

$$\begin{cases} -2(x+2) = 0 \\ -2(y+2) = 0 \end{cases} \boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \quad f(-2,-2) = 0}$$

$Max\ f(x,y) = -(x+2)^2 - (y+2)^2$

s.a $y = 1$



$Max\ f(x) = -(x+2)^2 - (1+2)^2$

$$\frac{df}{dx} = -2(x+2\ )$$

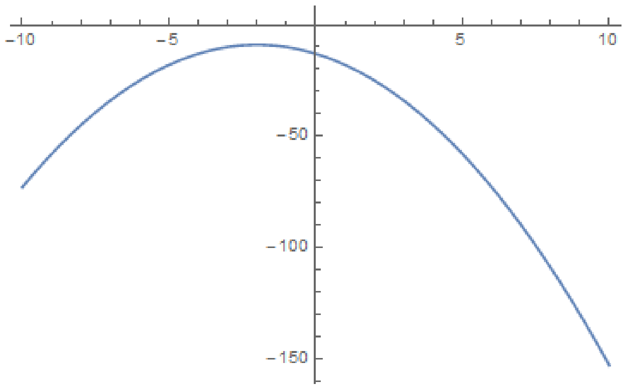
$\frac{d^2f}{dx^2} = -2 < 0$ função côncava

$\frac{df}{dx} = 0$ é condição necessária e suficiente de máximo global.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \quad f(-2{,}1) = -9$$

$$Max\ f(x,y) = -(x+2)^2 - (y+2)^2$$

$$\text{s.a } y = 1$$



$$L(x,y,u) = -(x+2)^2 - (y+2)^2 - u(y-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2(x+2\ ) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2(y+2\ ) - u = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = (y-1) = 0$$

Condições…

$$\begin{cases} x = -2 \\ u = -6 \\ \ y = 1 \end{cases} \qquad f(-2,1) = -9$$

Com restrições de desigualdade

$Max\ f(x,y) = -(x+2)^2 - (y+2)^2$

s.a $x, y \geq 0$

$\nabla f(x,y) = [-2(x+2),\ -2(y+2)]$

Condições

$\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0;\ \frac{\partial f}{\partial x}x = 0;\ x \geq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0;\ \frac{\partial f}{\partial y}y = 0;\ y \geq 0$

$$\begin{cases} -2(x+2) \leq 0 \\ -2(y+2) \leq 0 \\ \mathbf{-2(x+2)x = 0} \\ \mathbf{-2(y+2)y = 0} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

	$-2(x+2) \leq 0$	$-2(y+2) \leq 0$	$x \geq 0$	$y \geq 0$
$x = 0$ e $y = 0$	-4	-4	0	0
$x = 0$ e $-2(y+2) = 0$	-4	0	0	-2
$y = 0$ e $-2(x+2) = 0$	0	-4	-2	0
$-2(x+2) = 0$ e $-2(y+2) = 0$	0	0	-2	-2

$$\begin{array}{ll} max & z = f(\boldsymbol{x}) \\ s.a & \begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Teorema:

Se as funções $f(\boldsymbol{x})$ e $g_i(\boldsymbol{x})$ para $i = 1, \dots, m$ são diferenciáveis e satisfazem certas condições de regularidade. Então $\boldsymbol{x}^* = ({x^*}_1, {x^*}_2, \dots, {x^*}_n)$ é uma solução ótima para o problema de programação não linear sse existem m números $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ a satisfazer as condições KKT:

1. $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$ $\quad j = 1,2, \dots, n$

2. ${x_j}^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*) \right) = 0$ $\quad j = 1,2, \dots, n$

3. $g_i(\boldsymbol{x}^*) - b_i \leq 0$ $\quad i = 1,2, \dots, m$

4. $u_i(g_i(\boldsymbol{x}^*) - b_i) = 0$ $\quad i = 1,2, \dots, m$

5. $x_j \geq 0$ $\quad j = 1,2, \dots, n$ $\qquad$ 6. $u_i \geq 0$ $\quad i = 1,2, \dots, m$

Conds nec e suf de máximo

Problema	Cond necessárias	Suficientes se:
Uma variável sem restrições	$\frac{df}{dx} = 0$	$f(x)$ côncava
Várias variáveis sem restrições	$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 j = 1,2,\ldots,n$	$f(\boldsymbol{x})$ côncava
Só restrições de não negatividade	$\frac{\partial f}{\partial x_j} \leq 0;$ $\frac{\partial f}{\partial x_j} x_j = 0;$ $x_j \geq 0$ $j = 1,2,\ldots,n$	$f(\boldsymbol{x})$ côncava
Problema genérico	KKT	$f(\boldsymbol{x})$ côncava $g_i(\boldsymbol{x})$ cônvexas $i = 1,2,\ldots,m$

$$Max\ z = 10x_1 - {x_1}^2 + 6x_2 - {x_2}^2$$

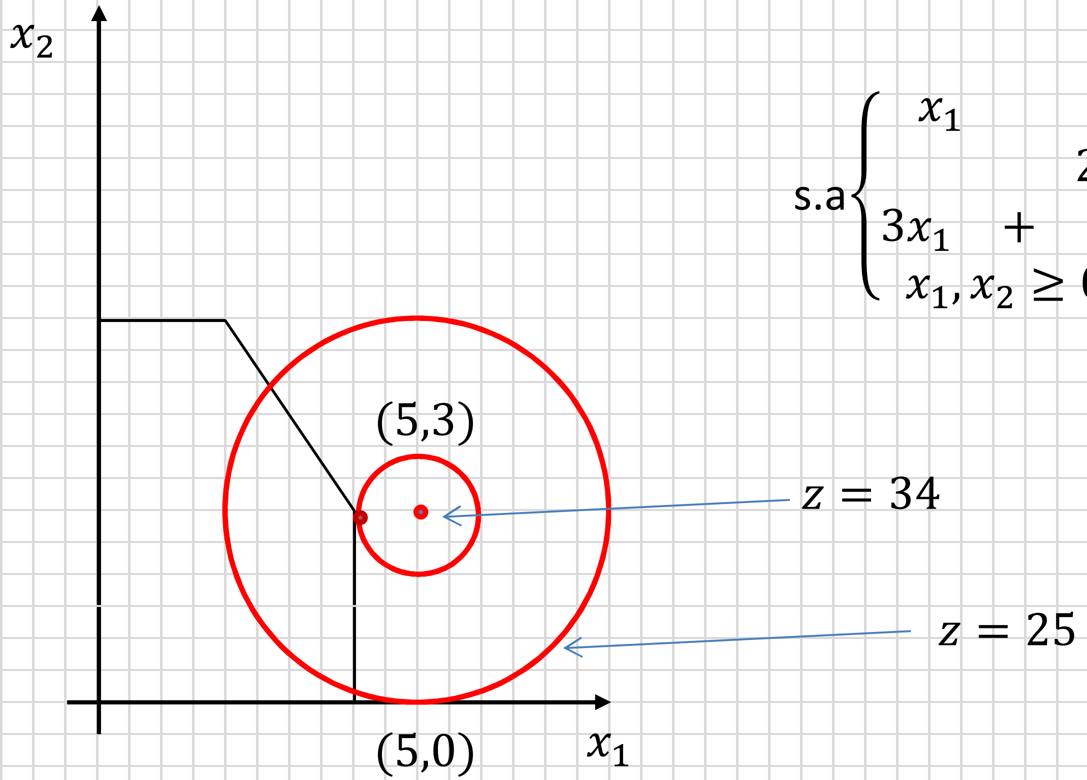
$$\text{s.a}\begin{cases} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução gráfica

o Solver só garante obter a s.o. se $\max$ f.o. côncava ou $\min$ f.o. convexa,

$$Max\ z = 10x_1 - x_1{}^2 + 6x_2 - x_2{}^2$$

$$\text{s.a}\begin{cases} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + \quad 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$Max\ z = 10x_1 - {x_1}^2 + 6x_2 - {x_2}^2$$

$$\text{s.a}\begin{cases} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

M3 =I3*B6+J3*C6+K3*B6*B6+L3*C6*C6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		x1	x2	total				Fo	x1	x2	x1^2	x2^2	
3		1		4	≤	4			10	6	-1	-1	33
4			2	6	≤	12							
5		3	2	18	≤	18							
6		4	3										
7													

Pretende-se determinar a percentagem a investir em cada um de 3 títulos de modo a minimizar o risco da carteira considerando-se como ganho mínimo aceitável 18% do investimento total. A informação sobre os títulos encontra-se nas tabelas seguintes:

Título	Ganho esperado	Risco (desvio padrão)
1	21%	25%
2	30%	45%
3	8%	5%

Par de Títulos	Risco conjunto (covariância)
1 e 2	0,04
1 e 3	-0,005
2 e 3	-0,01

S_j = % do investimento dedicada ao título j, $j = 1,2,3$

$$\min Z = (0.25S_1)^2 + (0.45S_2)^2 + (0.05S_3)^2 + 2 * 0{,}04S_1S_2 - 2 * 0{,}005S_1S_3 - 2 * 0{,}01S_2S_3$$

$$s.a \begin{cases} 21S_1 + 30S_2 + 8S_3 \geq 18 \\ S_1 + S_2 + S_3 = 1 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

H8 =B8*B8*B5*B5+C8*C8*C5*C5+D8*D8*D5*D5+2*E8*B5*C5+2*F8*B5*D5+2*G8*C5*D5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2		S1	S2	S3	total						
3		21	30	8	18	≥	18				
4		1	1	1	1	=	1				
5		0,401955	0,217027	0,381018							
6											
7		S1^2	S2^2	S3^2	S1S2	S1S3	S2S3	total			
8	Fo	0,25	0,45	0,05	0,04	-0,005	-0,01	0,023792			
9											

Ex.12.2.9. Considere o problema

$$(\text{PNL}) \quad \begin{array}{ll} max & z = x_1 + x_2 \\ s.a & \begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Verifique que se trata de um problema de programação convexa.

Ex. 12.6.5. Considere o problema

$$(\text{PNL}) \quad \begin{array}{ll} max & z = \ln(x_1 + 1) - {x_2}^2 \\ s.a & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

a) Averigue se se trata de um problema de programação convexa.

b) Se o resolver com o Solver, a solução obtida é garantidamente ótima? Em caso afirmativo, resolva-o com o Solver.

c) Escreva as condições de KKT.