LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática I - 1º Semestre - 2018/2019

Teste 2 - Época Normal - 9 de janeiro de 2019

Nome:	**Número:**

Tópicos de resolução

1. [2,0 valores] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função bijetiva definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x + 1}$ e f^{-1} a respetiva bijeção inversa.
Considere a reta t_1 tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e a reta t_2 tangente ao gráfico de f^{-1} no ponto de coordenadas $(2, 1)$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção de t_1 e t_2.

Tem-se, para todo o x tal que $x^3 + 6x + 1 \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 + 6)(x^3 + 6x + 1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{x^2 + 2}{(x^3 + 6x + 1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Assim, $f'(0) = 2$ e a equação reduzida de t_1 é $y = 2x + 1$.

Por outro lado, pelo Teorema de derivação da função inversa.

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{3}$$

e t_2 tem por equação $y = \frac{4}{3}(x - 2) + 1 = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

Resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$$

obtém-se o ponto de interseção das tangentes $P(-4; -7)$.

2. [1,5 valores] Determine o polinómio de Taylor centrado em $a = 1$ de ordem 2 da função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ e utilize-o para obter uma aproximação de $\sqrt[4]{1,1}$.

Tem-se, para $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$ e $f''(x) = -\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}$: $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{4}$ e $f''(1) = -\frac{3}{16}$.
O polinómio de Taylor de f centrado em 1 de ordem 2 é pois

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{3}{32}(x - 1)^2$$

e

$$\sqrt[4]{1,1} \approx P_2(1,1) = 1 + \frac{1}{4} \times 0,1 - \frac{3}{32} \times 0,01 = 1 + \frac{1}{40} - \frac{3}{3200} = \frac{3200 + 80 - 3}{3200} = \frac{3277}{3200}.$$

3. a. [1,0 valores] Considere as funções definidas em $\mathbb{R}^+$ por

$$f(x) = \frac{2x\ln(x)}{x+1} \text{ e } g(x) = \ln(x)$$

Calcule as funções de elasticidade $El[f]$ e $El[g]$ e deduza que $\lim_{x\to+\infty} \frac{El[f](x)}{El[g](x)} = 1.$

Tem-se, para $x > 1$, $El[f](x) = x\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln(x)} - \frac{1}{x+1}\Big) = 1 + \frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\ln(x)}$ e $El[g](x) = \frac{1}{\ln(x)}$.

Assim, $\frac{El[f](x)}{El[g](x)} = \frac{\ln(x)}{x+1} + 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{El[f](x)}{El[g](x)} = 0 + 1 = 1.$

b. [1,5 valores]

Mostre, de forma mais geral, que se f e g forem duas quaisquer funções diferenciáveis com $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então necessariamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{El[f](x)}{El[g](x)} = 1.$$

Pela Regra de Cauchy, tem-se também que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, pelo que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{El[f](x)}{El[g](x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{xf'(x)}{f(x)}}{\frac{xg'(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f'(x)}{g'(x)}}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{l}{l} = 1.$$

4. a.[1,0 valores] Calcule

$$\int x^3 \ln(x) dx.$$

Vamos primitivar por partes, tomando $u(x) = \ln(x)$, $v'(x) = x^3$, $u'(x) = \frac{1}{x}$ e $v(x) = \frac{1}{4}x^4$:

$$\int x^3 \ln(x) dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b.[1,5 valores] Calcule

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)} dx.$$

Efetuando a divisão euclidiana obtém-se que

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} = 1 + \frac{4x - 1}{(x-1)(x-2)}.$$

Calculamos agora constantes reais A e B tais que

$$\frac{4x - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)},$$

resolvendo-se para o efeito o sistema

$$\begin{cases} A + B & = & 4 \\ -2A - B & = & -1 \end{cases}$$

Este sistema fornece a solução $A = -3$ e $B = 7$. Assim,

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x-2)} dx = \int \left(1 - \frac{3}{x-1} + \frac{7}{x-2}\right) dx = x - 3\ln|x-1| + 7\ln|x-2| + c$$

$$= x + \ln \frac{(x-2)^7}{|x-1|^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. [1,5 valores] Utilize a substituição $y = 1 + 3x$ para mostrar que

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{8}{27}.$$

Tem-se $dy = 3dx$. Efetuando a substituição sugerida,

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx = \int_1^4 \frac{y-1}{3\sqrt{y}} \frac{dy}{3} = \frac{1}{9}\int_1^4 \left(y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right) dy = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{9}\left(8 \times \frac{2}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2\right) = \frac{16 - 12 - 2 + 6}{27} = \frac{8}{27}.$$