INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO - UNIVERSIDADE DE LISBOA

ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/GES FIN – 1.º Semestre 2018/19 – Exame - Época de Recurso

NOME: ______________________________ **N.º:**________

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta errada vale -0.25 valores. Note que nestas perguntas apenas uma resposta está correta.

Cotações:

1.	2.	3.a)	b)	4.a)	b)	5.a)	b)	6.a)	b)	7.a)	b)	8.a)	b)	Total
1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	20

1. Prove a afirmação seguinte: *se A e B são acontecimentos independentes, então também o são $\overline{A}$ e B.*

RESPOSTA 1. Tem que se provar que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.

$P\left(\overline{A}\right) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(B) - P(A) \times P(B)$. Como A e B são acontecimentos independentes então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Logo, $P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B - A) = P\left(B \cap \overline{A}\right)$.

VSFF

2. Sejam X_i, $i = 1, ..., 4$ variáveis aleatórias independentes tais que $E\left[\exp\left(-X_i\right)\right] = i/\left(i+1\right)$. Obtenha o valor de $E\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{4} X_i\right)\right]$.

RESPOSTA 2. Devido à independência nós temos

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{4} X_i\right)\right] &= E\left[\prod_{i=1}^{4} \exp\left(-X_i\right)\right] = \prod_{i=1}^{4} E\left[\exp\left(-X_i\right)\right] \\ &= \prod_{i=1}^{4} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 \end{aligned}$$

VSFF

3. a) Uma loja de brinquedos emprega 3 pessoas para fazerem embrulhos de presentes durante a época de Natal. A Raquel embrulha 30% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 3% das vezes; A Helena que embrulha 20% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 8% das vezes; O João que embrulha os restantes presentes e esquece-se de tirar o preço 5% das vezes. Qual é a probabilidade de um presente embrulhado e comprado nessa loja durante a época de Natal **não** ter o preço?

☐ **i)** $0,87$. ☐ **ii)** $0,05$.
☐ **iii)** $0,13$. ☒ **iv)** $0,95$.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Em dias de chuva o João chega atrasado ao emprego com probabilidade de $0,3$. Nos dias em que não chove, ele chega atrasado ao emprego com probabilidade $0,1$. Suponha que a probabilidade de chuva num dia escolhido aleatoriamente é de $0,7$. Dado que o João não chegou atrasado ao emprego nesse dia, qual é a probabilidade de que choveu?

RESPOSTA 3.b) Utilizando o Teorema de Bayes nós temos:

$$P(choveu|\text{não atrasado}) = P(\text{não atrasado}|choveu)\frac{P(choveu)}{P(\text{não atrasado})}.$$

Pelo teorema da probabilidade total nós temos:

$$\begin{aligned} P(\text{não atrasado}) &= P(\text{não atrasado}|choveu)P(choveu) + P(\text{não atrasado}|\textit{não choveu})P(\textit{não choveu}) \\ &= (1-0,3)\times 0,7 + (1-0,1)\times 0,3 = 0,76. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} P(choveu|\text{não atrasado}) &= P(\text{não atrasado}|choveu)\frac{P(choveu)}{P(\text{não atrasado})} \\ &= (1-0,3)0,7/0,76 = 0,64474. \end{aligned}$$

4. a) Suponha que X tem a seguinte função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/32 & \text{se } 0 \leq x < 1/4 \\ x^2 & \text{se } 1/4 \leq x < 3/4 \\ 1 & \text{se } x \geq 3/4 \end{cases}.$$

Qual é o valor de $P\,(0 < X < 3/4)$?

☐ **i)** 1. ☐ **ii)** 31/32. ☐ **iii)** 9/16. ☒ **iv)** 17/32.

☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Seja

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } X < 1/4 \\ 1 & \text{se } 1/4 \leq X < 3/4 \\ 2 & \text{se } X \geq 3/4 \end{cases}.$$

Obtenha as funções probabilidade e distribuição de Y.

RESPOSTA 4.b) A função probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} f_Y(0) &= P(Y=0) = P(X < 1/4) = \lim_{x \to (1/4)^-} F(x) = \frac{1}{32}, \\ f_Y(1) &= P(Y=1) = P(1/4 \leq X < 3/4) = \lim_{x \to (3/4)^-} F(x) - \lim_{x \to (1/4)^-} F(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{32} \\ &= \frac{17}{32}, \\ f_Y(2) &= P(Y=2) = P\,(X \geq 3/4) = 1 - \lim_{x \to (3/4)^-} F(x) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Consequentemente a função distribuição é dada por

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1/32 & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 9/16 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{se } y \geq 2 \end{cases}.$$

VSFF

5. a) Seja X uma variável aleatória em que $\mu = E(X)$ e em que se verifica que $E(X^2) < +\infty$. Nestas condições, assinale a afirmação verdadeira:

- ☐ **i)** Existe, necessariamente, o momento de ordem 3 em relação à média.
- ☒ **ii)** Sendo $Y = X - \mu$, é certo que $E\left(Y^2\right) < +\infty$.
- ☐ **iii)** É sempre possível obter μ a partir de $E(X^2)$.
- ☐ **iv)** Como $Var(X) > E(X^2)$, então não é possível garantir a existência da variância de X.
- ☐ **v)** Calcula-se $E(X^2)$ a partir da relação $E\left(X^2\right) = \mu^2 - Cov(X, X)$.

b) Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (0 < x < 1) \\ \frac{1}{4} & (1 < x < 4) \end{cases}$$

Calcule $E(X)$. Sabendo que $Z = 3X - \frac{1}{8}Y$ e $E(Y) = 9$, calcule $E(Z)$.

RESPOSTA 5.b) $E(X) = \int_0^1 \frac{x}{2} x dx + \int_1^4 \frac{1}{4} x dx = \frac{49}{24}$; $E(Z) = 3 \times \frac{49}{24} - \frac{1}{8} \times 9 = 5$

VSFF

6. Uma determinada loja de telecomunicações vende, entre outros produtos, um determinado modelo de smartphone. Seja X o número de smartphones deste modelo específico recebidos diariamente na loja para venda. Seja Y o número de smartphones deste modelo vendidos diariamente nesta loja. Assuma que (X, Y) é um vetor aleatório com função probabilidade conjunta resumida no quadro seguinte:

x\y	**0**	**1**	**2**
0	k	0	0
1	k	k	0
2	k	k	k

a) Demonstre que $k = 1/6$.

b) Sabendo que $k = 1/6$, o valor da variância de Y é:
☐ **i)** 2/3.
☒ **ii)** 5/9.
☐ **iii)** 1.
☐ **iv)** 13/9.
☐ **v)** nenhuma das alternativas anteriores.

RESPOSTA 6.a) A função probabilidade conjunta é dada por:

$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	k	0	0	k
1	k	k	0	$2k$
2	k	k	k	$3k$
$f_Y(y)$	$3k$	$2k$	k	1

O valor de k obtém-se da seguinte forma: $f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = 1 \Leftrightarrow k + 2k + 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$.

VSFF

7. Considere que o número de pessoas que compram, pelo menos, uma peça de vestuário na loja FORADEMODA segue um processo de Poisson com taxa média de 3 por dia.

   a) A probabilidade de 10 ou mais pessoas adquirirem, pelo menos, uma peça de vestuário na loja FORADEMODA durante uma semana (5 dias) é igual a...
      ☐ **i) ...**$0,1185$.
      ☒ **ii) ...**$0,9301$.
      ☐ **iii) ....**$0,0011$.
      ☐ **iv)** ...$0,8815$.
      ☐ **v) ...**nenhuma das alternativas anteriores.

   b) Escolhidos ao acaso 10 dias, qual a probabilidade de não se vender nenhuma peça de vestuário em mais de dois dos dias considerados na loja FORADEMODA.

RESPOSTA 7.b) Seja Y ="número de dias em que não se vende nenhuma peça de vestuário na loja FORADEMODA em 10 dias escolhidos ao acaso". Então, $Y \sim B(n = 10; \theta = 0.0498)$ pois $P\,(X = 0) = 0,0498$. Pretende-se $P\,(Y > 2)$.

$$P\,(Y > 2) = 1 - P\,(Y \leq 2) \approx 1 - 0,9885 = 0,0115$$

VSFF

8. Um comerciante pretende adquirir tangerinas de um dos pomares A ou B. Como o peso do fruto é factor preferencial, o comerciante toma uma amostra casual de 36 tangerinas (em cada pomar) e escolhe o pomar que corresponde à amostra com maior peso médio. O peso de cada tangerina é normalmente distribuído, com parâmetros resumidos no quadro seguinte:

Pomar	Média (grs)	Desvio Padrão (grs)
A	100	4
B	99	3

a) Assumindo que as amostras são independentes, qual é a probabilidade (arredondada a 4 casas decimais) do comerciante escolher o pomar B?
☒ **i)** $0,1151$. ☐ **ii)** $0,8849$. ☐ **iii)** $0,4201$. ☐ **iv)** $0,5799$.
☐ **v)** Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Determine a dimensão mínima da amostra a retirar da população de tangerinas do pomar A de modo a que a probabilidade da média amostral se situe entre 98 e 102 gramas com probabilidade maior ou igual a $0,95$.

RESPOSTA 8.b)

$$
\begin{aligned}
P\left(98 < \bar{X}_A < 102\right) &= P\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{16}{n}}} < \frac{\bar{X}_A - 100}{\sqrt{\frac{16}{n}}} < \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - 1.
\end{aligned}
$$

Pretende-se $2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - 1 \geq 0,95$.

$$
\begin{aligned}
2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - 1 &\geq 0,95 \Leftrightarrow \\
\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) &\geq 0,975 \Leftrightarrow \\
\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}} &\geq 1,96 \Leftrightarrow \\
n &\geq 15.366
\end{aligned}
$$

uma vez que a função $\Phi(x)$ é crescente. Consequentemente $n = 16$.

FIM