LISBOA SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT

# Estatística II

Licenciatura em Gestão

1º Semestre – 2018/2019
Teste Intercalar
Duração: 1 Hora

Nome: ______________________ Nº______________

| Espaço reservado a classificações | | | |
|---|---|---|---|
| 1.a) | 1.c) | 3) | 4.b) |
| 1.b) | 2) | 4.a) | 4.c) |

Se necessitar de mais espaço, pode utilizar a última página do enunciado, indicando claramente a respectiva questão.
É expressamente proibido destacar as folhas do enunciado!

*Boa Sorte!*

1) Assuma que o número de unidades de um produto que uma pessoa adquire é uma variável aleatória com a seguinte função probabilidade:

$$f(x|\alpha) = \alpha^x(1-\alpha) \quad (x = 0, 1, 2, \dots; 0 < \alpha < 1), \text{ onde } E(X) = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Considere ainda que de uma amostra casual se obteve $\bar{x} = 4$.

a) Mostre que o estimador da máxima verosimilhança para $\alpha$ é dado por: $\hat{\alpha} = \bar{X}/(\bar{X}+1)$. *(1.5)*

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\alpha) = \prod_{i=1}^{n}[\alpha^{x_i}(1-\alpha)] = \alpha^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\alpha)^n = \alpha^{n\bar{x}}(1-\alpha)^n, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$l(\alpha) = \ln[L(\alpha)] = \ln[\alpha^{n\bar{x}}(1-\alpha)^n] = n\bar{x}\ln(\alpha) + n\ln(1-\alpha), \quad 0 < \alpha < 1$$

$$l'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\bar{x}}{\alpha} - \frac{n}{1-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\bar{x}}{\alpha} = \frac{n}{1-\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \bar{x}(1-\alpha) \Leftrightarrow \alpha(\bar{x}+1) = \bar{x} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\bar{x}}{\bar{x}+1}$$

Porque $l''(\alpha) < 0$, o estimador da máxima verosimilhança para $\alpha$ é:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+1}$$

b) O estimador do método dos momentos para $\alpha$… *(1.0)*

| | |
|---|---|
| … não existe. | |
| … é igual ao estimador da máxima verosimilhança. | **X** |
| … é igual a $\bar{X}/(1-\bar{X})$. | |
| … é igual a $\bar{X}$. | |

c) Calcule, justificando, a estimativa para a probabilidade de uma pessoa não adquirir o produto, isto é, a estimativa para $f(0|\alpha)$. *(1.0)*

$f(0|\alpha) = \alpha^0(1-\alpha) = 1-\alpha$ é uma função biunívoca de $\alpha$.

Logo, pela propriedade da invariância dos estimadores de máxima verosimilhança, tem-se:

$$\hat{f}(0|\alpha) = (\widehat{1-\alpha}) = 1-\hat{\alpha} = 1-\frac{\bar{x}}{\bar{x}+1} = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

2) Verdadeiro ou Falso? Assinale com um **X**. *(0.25 cada; –0.25 por resposta errada)*

| | V | F |
|---|---|---|
| Se $T$ é um estimador consistente para $\theta$, então $T$ tem de ser centrado para $\theta$. | | **X** |
| Sejam $T_1$ e $T_2$ dois estimadores centrados para $\theta$. Então $T_1$ é mais eficiente do que $T_2$ se e só se: $Var(T_1) \leq Var(T_2),\ \forall\theta \in \Theta$. | **X** | |
| A desigualdade de Fréchet-Cramer-Rao coloca um limite inferior para a variância de um estimador centrado de $\theta$. | **X** | |
| Uma variável fulcral é um estimador. | | **X** |

3) Os rácios de liquidez de dois grupos de empresas podem ser considerados variáveis aleatórias independentes. Recolhidas amostras casuais de ambos os grupos, obtiveram-se os seguintes resultados:

- Amostra de empresas do Grupo 1: $m = 50$, $\bar{x}_1 = 2.05$, ${s'}_1^2 = 1.60$
- Amostra de empresas do Grupo 2: $n = 50$, $\bar{x}_2 = 2.20$, ${s'}_2^2 = 1.75$

Construa um intervalo de confiança a 95% para a diferença entre as médias dos rácios de liquidez das empresas dos Grupos 1 e 2. Interprete o resultado obtido. *(1.5)*

IC a 95% para $\mu_1 - \mu_2$ (Grandes Amostras – Caso Geral)

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1'^2}{m} + \frac{S_2'^2}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

IC: $\left((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{0.025} \times \sqrt{\frac{s_1'^2}{m} + \frac{s_2'^2}{n}}\right) = \left((2.05 - 2.20) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{1.60}{50} + \frac{1.75}{50}}\right) = (-0.657, 0.357)$

Com uma confiança de 95% pode afirmar-se que a diferença entre as médias dos rácios de liquidez dos dois grupos de empresas se situa entre –0.657 e 0.357.

4) Num estudo levado a cabo pela Associação de Estudantes do ISEG, foram inquiridos 100 estudantes da Licenciatura em Gestão, dos quais 82 manifestaram estar satisfeitos com a escolha do curso.

a) Teste com um nível de significância de 5% a hipótese de mais de 80% dos estudantes da Licenciatura em Gestão estarem satisfeitos com a escolha do curso. O que pode concluir? *(1.5)*

População de Bernoulli

$$H_0: \theta \leq 0.8 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta > 0.8$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \theta_0}{\sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$W_{0.05} = \{z_{obs}: z_{obs} > 1.645\}$$

$$z_{obs} = \frac{\left(\frac{82}{100}\right) - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{100}}} = 0.5$$

Porque $z_{obs} \notin W_{0.05}$, não se rejeita $H_0$ ao nível de 5%. Evidência estatística desfavorável à hipótese de mais de 80% dos estudantes estarem satisfeitos com a escolha do curso.

b) Qual a potência do teste efetuado na alínea anterior, admitindo que a verdadeira proporção de alunos satisfeitos é de 90%. *(1.5)*

<u>Função Potência</u>:

$$\beta(\theta) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) = P\left(\bar{X} > \theta_0 + z_{0.05} \times \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}} \middle| \theta > 0.8\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} > 0.8 + 1.645 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} \middle| \theta > 0.8\right) = P(\bar{X} > 0.8658 | \theta > 0.8) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} > \frac{0.8658 - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{100}}} \middle| \theta > 0.8\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0.8658 - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{100}}}\right), \quad \theta > 0.8$$

Logo, para $\theta = 0.90$, tem-se a potência:

$$\beta(0.90) = 1 - \Phi\left(\frac{0.8658 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90 \times 0.10}{100}}}\right) = 1 - \Phi(-1.14) = \Phi(1.14) = 0.8729$$

c) Caso o nível de significância do teste de hipóteses em a) aumentasse de 5% para 10%, o que aconteceria ao valor-p? *(1.0)*

| | |
|---|---|
| Aumentava. | |
| Diminuía. | |
| Mantinha-se inalterado. | **X** |