Instituto Superior de Economia e Gestão

Exercícios de Análise Matemática IV – MAEG

1. Equação diferencial de 1ª ordem

1.1 Mostre que $\log(t+1) - x(t) + \log\left(e^{x(t)}+1\right) + C = 0$, com $C \in \Re$, é solução (implícita) da EDO $x' = \dfrac{e^x+1}{t+1}$, com $t > -1$.

1.2 Mostre que $x(t) = \dfrac{2t}{3-t^2}$ é solução do PVI $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{t} + x^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$.

1.3 Estude o comportamento de todas as soluções da equação $x' + ax = 0$, a constante, quando $t \to +\infty$. Contextualize, historicamente, o modelo de Malthus.

1.4 Obtenha a solução geral da EDO $x' = -\dfrac{x}{t} + 2$ com $t > 0$.

1.5 Obtenha a solução geral da EDO $x' - \dfrac{n}{t}x = e^t t^n$ com $n \in \Re$ e $t > 0$.

1.6 Resolva o PVI $\begin{cases} t^2 \dfrac{x'}{x} + 2t \log x = 0 \\ x(1) = e \end{cases}$.

1.7 Resolva as seguintes EDOs:

a) $x' + \dfrac{1+x^3}{tx^2\left(1+t^2\right)} = 0$

b) $x' = \dfrac{tx}{t^2 - x^2}$

c) $\dfrac{2t}{x^3} + \dfrac{x^2 - 3t^2}{x^4} x' = 0$

1.8 Encontre uma solução contínua do PVI $\begin{cases} x' = -x + g(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$, onde $g(t) = \begin{cases} 2 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$.

1.9 Seja $x' = a(t)x + b(t)$ com a e b funções contínuas para $t \in \Re$, tais que $a(t) \le -k < 0$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} b(t) = 0$. Mostre que qualquer solução da equação tende para zero quando $t \to +\infty$.

1.10 Obtenha a solução geral da equação $x' = ax - bx^2$, com $a, b > 0$.

1.11 Mostre que toda a EDO de variáveis separáveis é uma EDO total exacta.

1.12 Prove que a equação de variáveis separáveis $tdt + xdx = 0$ admite como solução, a equação de uma família de circunferências concêntricas na origem e de raio $\sqrt{2C}$.

1.13 Mostre que a equação $M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$, onde M e N são funções homogéneas do mesmo grau, é uma equação homogénea.

1.14 Encontre todas as funções *f(t)* tal que a equação diferencial $x^2 sent + xf(t)x' = 0$ seja exacta. Resolva a equação para as expressões *f(t)* encontradas.

1.15 A equação $e^t \sec x - tgx + x' = 0$ tem um factor integrante da forma $\mu(t,x) = e^{-at}\cos x$. Resolva a equação diferencial, para o valor da constante *a* encontrado.

1.16 Estude o comportamento de todas as soluções da equação $x' + tg(t)x = sent.\cos t$ quando $t \to \pi/2$.

1.17 Considere a equação diferencial $\left(x^2 - tx\right)dt + 2h(t,x)dx = 0$.

a) Determine $h(t,x)$ sabendo que a equação admite como factor integrante a função $\mu(x) = x^{-1/2}$.

b) Obtenha o integral geral da equação.

1.18 Resolva o PVI $\begin{cases} \left(3t^2x + x^3 + 2\right)dt + \left(3x^2t + t^3 + 5\right)dx = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$.

1.19 Considere a equação $x' = \dfrac{at + bx + m}{ct + dx + n}$, onde *a, b, c, d, m* e *n* são constantes.

a) Prove que se $ad - bc \neq 0$, a equação pode sempre reduzir-se a $x' = \dfrac{at + bx}{ct + dx}$.

b) Resolva a equação anterior no caso $ad = bc$.

c) Resolva a equação $(t + 2x + 3)dt + (2t + 4x - 1)dx = 0$.

1.20 Considere a equação $\left(a(t)x + b(t)\right)dt + dx = 0$, onde a e b são funções contínuas em $\Re$.

a) Mostre que a equação é redutível a uma equação total exacta.

b) Usando a alínea anterior, obtenha a solução geral para o caso $a(t) = b(t) = 2t$ e calcule $\lim_{t\to+\infty} x(t)$.

1.21 Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

a) $x' + tx = (tx)^3$

b) $x' + 2tx = tx^2$

c) $x - x'\cos t = x^2(1 - sent)\cos t$

d) $(1 - t^2)x' - tx - stx^2 = 0$.

1.22 Dada a equação de Riccati $x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, mostre que se for conhecida uma solução particular, $\phi(t)$, a transformação $x = \phi(t) + \dfrac{1}{z(t)}$ reduz a equação dada a uma equação linear.

1.23 Resolva o PVI $\begin{cases} x'' = \dfrac{(x')^2}{x} \\ x'(0) = 1 \\ x(0) = -1 \end{cases}$.

1.24 Resolva a equação $x'' = \dfrac{x'}{t}\left(1 + \log\dfrac{x'}{t}\right)$.

1.25 Considere o PVI $\begin{cases} x' = -ax + g(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, com $a > 0$.

a) Mostre que

$$x(t) = e^{-at}x_0 + e^{-at}\int_0^t e^{as} g(s, x(s))ds$$

é solução do PVI.

b) Admita as seguintes hipóteses, e o seguinte lema:

H1) $|g(t,x)| \le b(t)|x|$, $b(t) \ge 0$

H2) $\int_{t_0}^{+\infty} e^{at} b(t)dt < +\infty$, $t_0 \in \Re$

Lema Seja $c \ge 0$ e $z(t)$ e $v(s)$ funções não negativas. Se $z(t) \le c + \int_0^t z(s)v(s)ds$ então $z(t) \le ce^{\int_0^t v(s)ds}$.

Mostre que $|x(t)|$ tende para zero quando $t \to +\infty$.

1.26 Considere o PVI $\begin{cases} x' = 2tx + 4t \\ x(0) = 1 \end{cases}$.

a) Resolva o PVI.

b) Utilize o método de Picard para obter a solução do PVI.

1.27 Considere o PVI $\begin{cases} x' = t^2 x + x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ em $R = \{(t,x) : |t| \le 2, |x-1| \le 2\}$.

a) Utilize o método de Picard para obter as três primeiras aproximações da solução $x(t)$.

b) Mostre que $f(t,x) = t^2 x + x^2$ satisfaz a condição de Lipschitz em R e determine a constante de Lipschitz.

c) Obtenha a solução do PVI.

1.28 Seja $g : \Re \to \Re$ uma função contínua e não identicamente nula. Mostre que o PVI $\begin{cases} x' = g(t)\sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ não tem solução única, e explique porque não está em contradição com o teorema de existência e unicidade.

1.29 Mostre que o PVI $\begin{cases} x' = \sqrt{x^2 - 1} \\ x(0) = 1 \end{cases}$ não tem solução única, e explique porque não está em contradição com o teorema de existência e unicidade.

1.30 Considere o PVI $\begin{cases} x' = \theta x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$, com θ um parâmetro positivo. Para que valores do parâmetro θ, existe uma solução única definida no intervalo $[0, T]$? Indique a resposta, considerando separadamente:

a) A solução do PVI.

b) O teorema de existência e unicidade de solução.

1.31 Justifique que os seguintes PVIs têm uma solução única em $\Re$, e determine-a.

a) $\begin{cases} x' = arctgx \\ x(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = e^{\cos t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \dfrac{e^x}{1 + e^x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

1.32 Considere a equação $x(t) = 1 + \int_0^t (t - s) x(s) ds$.

a) Utilize o método de Picard para resolver a equação.

b) Mostre que a equação dada representa um certo PVI.

c) Mostre que a solução obtida na alínea a) satisfaz o PVI da alínea anterior.

2. Equação diferencial de ordem n

2.1 Dada a equação linear de 2ª ordem, $x''+a(t)x'+b(t)x=0$ com $a(t)\,\mathrm{e}\,b(t)$ funções contínuas definidas num intervalo real, suponha que $x_1(t)\neq 0$ é uma solução dessa equação. Suponha também que se pretende encontrar uma nova solução da forma $x_1(t)u(t)$ com $u(t)\neq 0$. Prove que essa nova solução se obtem resolvendo uma equação linear de 1ª ordem homogénea.

2.2 Suponha que as raízes da equação quadrática $r^2+ar+b=0$ têm partes reais negativas. Prove que toda a solução da equação $x''+ax'+bx=0$ tende para *0* quando $t\to+\infty$.

2.3 Considere a equação $x''+ax'+bx=0,\ a,b\in\Re$.

a) Prove que se a equação $r^2+ar+b=0$ tem raízes iguais, então $x_1(t)=e^{-\frac{at}{2}}$ é solução da equação diferencial dada.

b) Encontre uma nova solução da equação diferencial, da forma $x_1(t)u(t)$. Mostre que $x_1(t)u(t)$ é solução da equação diferencial sse $u(t)=C_1t+C_2$ com $C_1,C_2\in\Re$.

2.4 Resolva as seguintes equações:

a) $x''-3x'+2x=0$ $\quad c.i.\ (t,x,x')=(0,1,-1)$

b) $x'''-3x''+4x=0$ $\quad c.i.\ (t,x,x')=(0,1,-1)$

c) $x''+2x'+x=\dfrac{e^{-t}}{t+1}$ $\quad \text{com}\ t\neq -1$

d) $x''+x'-2x=8sen(2t)$

e) $x''+4x=\cos(2t)$

f) $x''+9x=(t^2+1)e^{3t}$

g) $x''-6x'+9x=2e^{3t}\cos(3t)$

h) $x''-5x'+6x=(t^2-3)e^{t}$

i) $x''+x=\sec(t)$.

2.5 Considere a equação diferencial $x^{(iv)}+4x'''+5x''+4x'+4x=0$. Para que condições iniciais $x(0),x'(0),x''(0),x'''(0)$, existe uma solução $x(t)$ tal que:

a) $x(t)$ é periódica

b) $\lim x(t)=0$ quando $t\to+\infty$

c) $\lim|x(t)|=\infty$ quando $t\to+\infty$

d) $|x(t)|$ é limitada para $t \geq 0$.

2.6 Encontre todas soluções periódicas de $x^{(iv)} + 2x'' + x = 0$.

2.7 Considere a equação diferencial linear de 2º ordem $x'' - \frac{2}{t^2}x = 0,\ t > 0$.

a) Verifique que $\phi(t) = t^2$ é uma solução da equação dada.

b) Determine uma aplicação $w : (0,+\infty) \to \Re$ de modo que ϕ e $w\phi$ constituam um sistema fundamental de soluções da equação dada.

c) Resolva o PVI $\begin{cases} x'' - \frac{2}{t^2}x = t \\ (t, x, x') = (1,0,1) \end{cases}$.

3. Sistemas de equações diferenciais

3.1 Mostre que $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções de $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e determine a solução do sistema.

3.2 Determine uma matriz fundamental de soluções do sistema de equações diferenciais lineares de 1ª ordem $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ e determine a sua solução.

3.3 Num determinado instante *t* as concentrações de dois produtos químicos *x* e *y*, em reacção, obedecem às seguintes igualdades:

i. $x'(t) = y(t) + t$

ii. $y'(t) = 6y(t) - 5x(t) + 6t - 1$

iii. $x(0) = 1, y(0) = y_0$

a) Escreva a equação diferencial linear de 2ª ordem que *x(t)* verifica necessariamente.

b) Resolva o sistema de equações diferenciais dado pelas igualdades i. e ii. que verifica as condições iniciais expressas em iii.

c) Calcule o valor de y_0 para o qual $\lim_{t \to 0} y(t) = 2 - y_0$.

3.4 Resolva o sistema linear não homogéneo $\begin{cases} x'_1 = -x_2 + t \\ x'_2 = x_1 \end{cases}$, sabendo que $x^1(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ sent \end{bmatrix}$ e $x^2(t) = \begin{bmatrix} -sent \\ \cos t \end{bmatrix}$ são soluções linearmente independentes do sistema homogéneo associado.

3.5 Seja *A* uma matriz diagonal de ordem n. Que condições *A* deve verificar para que $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, para todas as soluções de $x' = Ax$.

3.6 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$. Determine valores para as constantes *a*, *b*, *c* tal que a curva $t \mapsto \left(a\cos t, bsent, ce^{-t/2}\right)$ seja solução de $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = (1,0,3) \end{cases}$.

3.7 Encontre duas matrizes diferentes *A* e *B* tais que a curva $x(t) = \left(e^t, 2e^{2t}, 4e^{2t}\right)$ satisfaça ambas as equações diferenciais $x' = Ax$ e $x' = Bx$.

3.8 Encontre uma matriz quadrada de ordem 2, *A*, tal que uma solução de $x' = Ax$ seja $x(t) = \left(e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t}\right)$.

3.9 Resolva os problemas de valores iniciais:

a) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3.10 Determine os vectores x^0 para os quais a solução do PVI, $x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x$ e $x(0) = x^0$, é uma função periódica.

3.11 Resolva o PVI, $x' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3.12 Determine a solução do PVI $\begin{cases} x''' + x' = \sec t . tgt \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}$, resolvendo o sistema de equações diferenciais equivalente à equação.

3.13 Pretende-se mostrar que $e^{At+Bt} = e^{At}e^{Bt}$ se $AB = BA$. Para o efeito, mostre sucessivamente:

a) $Y(t) = e^{At+Bt}$ satisfaz o PVI $\begin{cases} Y'(t) = (A+B)Y(t) \\ Y(0) = I \end{cases}$

b) $e^{At}B = Be^{At}$ se $AB = BA$, e nestas condições $Z(t) = e^{At}e^{Bt}$ é solução do PVI $\begin{cases} Z'(t) = (A+B)Z(t) \\ Z(0) = I \end{cases}$

c) Conclua que $Y(t) = Z(t)$.

3.14 Seja A uma matriz idempotente. Calcule e^{At}.

3.15 Seja $\Phi_1(t)$ uma matriz fundamental de soluções de $x' = Ax$. Mostre que $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$ é uma matriz fundamental de soluções sse $|C| \neq 0$.

3.16 Seja A uma matriz quadrada de ordem 2 de traço nulo e determinante positivo.

a) Mostre que $A^2 = -|A|I$.

b) Mostre que $e^{At} = \frac{A}{\sqrt{|A|}} sen\left(\sqrt{|A|}t\right) + \cos\left(\sqrt{|A|}t\right)I$. **Sugestão**: i. Usando a definição de e^{At}, calcule A^3, A^4, etc a partir da relação $A^2 = -|A|I$. ii. Considere os desenvolvimentos em série, $senx = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$ e $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$

c) Usando a alínea anterior determine a solução do PVI $\begin{cases} x' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x \\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$.

3.17 Seja $\Phi_1(t)$ uma matriz fundamental de soluções de $x' = Ax$ e $\Phi_2(t)$ uma matriz fundamental de soluções de $x' = Bx$. Sabendo que $AB = BA$ obtenha a solução do PVI $\begin{cases} z'(t) = (A+B)z(t) \\ z(0) = z^0 \end{cases}$.

3.18 Resolva os seguintes PVIs:

a) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $x' = Ax$ sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.19 Considere o PVI $\begin{cases} x' = Ax + b \\ x(0) = x^0 \end{cases}$ onde b é um vector de constantes $n \times 1$.

a) Mostre que a solução do PVI é $x(t) = e^{At}x^0 + (e^{At} - I)A^{-1}b$.

b) Use o resultado da alínea anterior no caso $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.20 Resolva o PVI $\begin{cases} x' = Ax + g(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $g(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3.21 Considere o sistema de equações diferenciais $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$.

a) Mostre que $x = y = 0$ é o único ponto de equilíbrio do sistema se $ad - bc \neq 0$.

b) Mostre que existe uma recta de pontos de equilíbrio para o sistema se $ad - bc = 0$.

3.22 Estude a estabilidade dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

a) $x'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}x$

b) $x'=\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}x$

c) $x'=\begin{bmatrix} -7 & 1 & -6 \\ 10 & -4 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}x$

d) $x'=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}x$

e) $x'=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}x$

3.23 Considere o sistema $\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2x^3 \end{cases}$. Mostre que a solução de equilíbrio $x = y = 0$ do sistema linearizado, é um ponto de sela.

3.24 Para que valores da constante α, é estável qualquer solução do sistema $\begin{cases} x' = -3x + \alpha y \\ y' = 2x + y \end{cases}$?

3.25 Estude a estabilidade das soluções das seguintes equações diferenciais:

a) $x' = x + t \quad x(0) = 1$

b) $x' = 2t(x+1) \quad x(0) = 0$

c) $x' = -x + t^2 \quad x(1) = 1$

d) $x' = 2 + t \quad x(0) = 1$

3.26 Estude a estabilidade das soluções $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$ da equação $x' = x(1-x)$.

3.27 Considere a equação diferencial $x' = x^2$. Mostre que todas as soluções $x(t)$ com $x(0) \geq 0$ são instáveis, enquanto que todas as soluções $x(t)$ com $x(0) < 0$ são assintoticamente estáveis.

3.28 Determine as soluções de equilíbrio de cada um dos seguintes sistemas de equações diferenciais e estude a estabilidade das mesmas:

a) $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 1 \\ y' = 2xy \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = tg\left(x + y\right) \\ y' = x + x^3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -y\cos x \\ y' = -senx \end{cases}$

4. Equações com diferenças

4.1 Resolva os seguintes PVIs:

a) $x(n+1) = -x(n) + 3 \quad x(0) = 0$

b) $x(n+1) - 4x(n) = 2 \quad x(0) = 6$

c) $x(n+2) + x\left(n+1\right) = 2x(n) \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 3$

4.2 Mostre que qualquer solução da equação $ax(n+2) + bx\left(n+1\right) + cx(n) = 0$ verifica $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ se e só se $\left|\lambda_1\right| < 1$ e $\left|\lambda_2\right| < 1$, onde λ_i são as raízes do polinómio de avanço.

4.3 Resolva as seguintes equações com diferenças:

a) $x(n+4) = -x(n) - 2x(n+2)$

b) $x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) = n$

c) $x(n+2) + 5x(n+1) + 6x(n) = 3\left(-2\right)^n \quad x(0) = 6 \wedge x(1) = -13$

d) $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 5 + 2t$

e) $y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = t$

f) $\Delta y_t = 2^t + t^2$

4.4 Usando a teoria das equações com diferenças, determine a soma das seguintes séries:

a) $\sum_{j=0}^{\infty} 3^j x^j \quad |x| < 1/3$

b) $\sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} \quad |x| < 1$

4.5 Considere o seguinte PVI, $x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = 0 \quad x(0) = -1 \quad x(1) = 7$. Escreva em sistema o problema equivalente e resolva-o.

5. **Integração de funções complexas**

5.1 Calcule $\int_\gamma f(z)dz$ onde γ é a circunferência de centro em *a* e raio *r*:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z-a}, \quad a \in C$

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^n}, \quad a \in C, n \in N$

5.2 Calcule $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ desde $z = 0$ até $z = 4 + 2i$ ao longo da curva definida por $\gamma(t) = t^2 + it$.

5.3 Calcule $\int_\gamma z^3 dz$ onde γ é a porção de elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ descrita no sentido directo entre $z = 1$ e $z = i/2$.

5.4 Calcule $\int_\gamma (z^2 + 3z) dz$,

a) ao longo da circunferência $|z| = 2$ de $z = 2$ a $z = 2i$

b) ao longo da linha recta de $z = 2$ a $z = 2i$

c) ao longo da poligonal de $z = 2$ a $z = 2 + 2i$ a $z = 2i$.

5.5 Calcule $\int_\gamma (\bar{z})^2 dz$,

a) ao longo da circunferência $|z| = 1$

b) ao longo da circunferência $|z - 1| = 1$

5.6 Prove que $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(sen\theta)d\theta = \pi$, considerando $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$.

5.7 Calcule $\int_{\gamma} \frac{e^z + z}{z-2}dz$,

a) onde γ é o círculo unitário

b) onde γ é o círculo centrado na origem de raio 3.

5.8 Calcule $\int_{\gamma} \frac{e^{3z}}{z - \pi i}dz$,

a) onde γ é o círculo $|z-1| = 4$

b) onde γ é a elipse $|z-2| + |z+2| = 6$

5.9 Calcule

a) $\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2 + 2z - 3}dz$

b) $\int_{|z|=5} \frac{sen(3z)}{z + \pi/2}dz$

5.10 Mostre que $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=3} \frac{e^{zt}}{z^2+1}dz = sent$, com $t > 0$.

5.11 Estude quanto à convergência absoluta as seguintes séries de potências:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n (z-i)^n}{n!}$

5.12 Mostre que as seguintes séries definem funções holomorfas, respectivamente nos conjuntos $D(0,2)$ e no complementar de $\overline{D(1,e)}$, obtendo as suas expressões:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{(z-1)^n}$

5.13 Desenvolva em série de Taylor as seguintes funções, em torno dos pontos indicados:

a) e^z, $z_0 = 1$ b) $\frac{1}{z}$, $z_0 = 1$

5.14 Classifique as singularidades das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{\cos z}$

b) $\dfrac{senz}{z(z-1)}$

c) $\dfrac{1}{zsen(\pi z)}$

d) tgz

e) $\dfrac{z-1}{z^3-1}$

f) $\dfrac{z^3+i}{(z-1)(z^2+1)}$

g) $\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

5.15 Considere a função $sen\left(\dfrac{\pi}{z-1}\right)$. Classifique a singularidade $z=1$ e determine o desenvolvimento de Laurent da função nesse ponto.

5.16 Desenvolva a função $e^{\frac{z}{z-1}}$ em série de Laurent em torno do ponto $z=1$ e classifique esta singularidade.

5.17 Calcule o resíduo de $f(z)=tgz$ em cada uma das suas singularidades.

5.18 Calcule os resíduos das funções seguintes nos pontos indicados:

a) $\dfrac{z^3}{(senz)^3}$ no ponto $z_0=0$

b) $\dfrac{1}{zsenz}$ no ponto $z_0=0$

5.19 Calcule o valor dos seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}dz$

b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cot gz}{z}dz$

c) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-i)^2 senz}dz$ onde γ é a curva definida parametricamente por $\gamma(t)=1+2\cos t+isent$, com $t\in[0,2\pi]$.

5.20 Calcule $\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)(z^2+9)}dz$ com $\gamma(\theta)=2e^{i\theta}+2i$ e $\theta\in[0,2\pi]$.

5.21 Seja $f(z)=\frac{e^z-e^{\frac{1}{z}}}{z}$. Estude a singularidade de f e determine o resíduo correspondente. Calcule $\int_{|z|=1} f(z)dz$.

5.22 Seja $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$.

a) Estude a função quanto à analiticidade e classifique a sua singularidade.

b) Calcule $\int_0^{2\pi} e^{4i\theta}e^{\cos\theta-isen\theta}d\theta$.