

NOME: _____ N.º: _____

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 1 valor, uma resposta errada vale -0.25 valores. Note que nestas perguntas apenas uma resposta está correta.

Cotações:

1.	2.	3.a)	b)	4.a)	b)	5.a)	b)	6.a)	b)	7.a)	b)	8.a)	b)	Total
1	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	20

1. Prove a afirmação seguinte: *se A e B são acontecimentos independentes, então também o são \bar{A} e B .*

RESPOSTA 1. Tem que se provar que $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$.

$P(\bar{A}) \times P(B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(B) - P(A) \times P(B)$. Como A e B são acontecimentos independentes então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Logo, $P(B) - P(A) \times P(B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B - A) = P(B \cap \bar{A})$.

2. Sejam X_i , $i = 1, \dots, 4$ variáveis aleatórias independentes tais que $E[\exp(-X_i)] = i/(i+1)$. Obtenha o valor de $E\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^4 X_i\right)\right]$.
-

RESPOSTA 2. Devido à independência nós temos

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^4 X_i\right)\right] &= E\left[\prod_{i=1}^4 \exp(-X_i)\right] = \prod_{i=1}^4 E[\exp(-X_i)] \\ &= \prod_{i=1}^4 \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0,2 \end{aligned}$$

3. a) Uma loja de brinquedos emprega 3 pessoas para fazerem embrulhos de presentes durante a época de Natal. A Raquel embrulha 30% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 3% das vezes; A Helena que embrulha 20% dos presentes e esquece-se de tirar o preço 8% das vezes; O João que embrulha os restantes presentes e esquece-se de tirar o preço 5% das vezes. Qual é a probabilidade de um presente embrulhado e comprado nessa loja durante a época de Natal **não** ter o preço?
- i) 0,87. ii) 0,05.
 iii) 0,13. iv) 0,95.
 v) Nenhuma das alternativas anteriores.
- b) Em dias de chuva o João chega atrasado ao emprego com probabilidade de 0,3. Nos dias em que não chove, ele chega atrasado ao emprego com probabilidade 0,1. Suponha que a probabilidade de chuva num dia escolhido aleatoriamente é de 0,7. Dado que o João não chegou atrasado ao emprego nesse dia, qual é a probabilidade de que choveu?
-

RESPOSTA 3.b) Utilizando o Teorema de Bayes nós temos:

$$P(\text{choveu}|\text{não atrasado}) = P(\text{não atrasado}|\text{choveu}) \frac{P(\text{choveu})}{P(\text{não atrasado})}.$$

Pelo teorema da probabilidade total nós temos:

$$\begin{aligned} P(\text{não atrasado}) &= P(\text{não atrasado}|\text{choveu})P(\text{choveu}) + P(\text{não atrasado}|\text{não choveu})P(\text{não choveu}) \\ &= (1 - 0,3) \times 0,7 + (1 - 0,1) \times 0,3 = 0,76. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} P(\text{choveu}|\text{não atrasado}) &= P(\text{não atrasado}|\text{choveu}) \frac{P(\text{choveu})}{P(\text{não atrasado})} \\ &= (1 - 0,3)0,7/0,76 = 0,64474. \end{aligned}$$

4. a) Suponha que X tem a seguinte função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/32 & \text{se } 0 \leq x < 1/4 \\ x^2 & \text{se } 1/4 \leq x < 3/4 \\ 1 & \text{se } x \geq 3/4 \end{cases} .$$

Qual é o valor de $P(0 < X < 3/4)$?

- i) 1. ii) 31/32. iii) 9/16. iv) 17/32.
 v) Nenhuma das alternativas anteriores.

b) Seja

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } X < 1/4 \\ 1 & \text{se } 1/4 \leq X < 3/4 \\ 2 & \text{se } X \geq 3/4 \end{cases} .$$

Obtenha as funções probabilidade e distribuição de Y .

RESPOSTA 4.b) A função probabilidade é dada por

$$f_Y(0) = P(Y = 0) = P(X < 1/4) = \lim_{x \rightarrow (1/4)^-} F(x) = \frac{1}{32},$$

$$\begin{aligned} f_Y(1) &= P(Y = 1) = P(1/4 \leq X < 3/4) = \lim_{x \rightarrow (3/4)^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow (1/4)^-} F(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{32} \\ &= \frac{17}{32}, \end{aligned}$$

$$f_Y(2) = P(Y = 2) = P(X \geq 3/4) = 1 - \lim_{x \rightarrow (3/4)^-} F(x) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$$

Consequentemente a função distribuição é dada por

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1/32 & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 9/16 & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{se } y \geq 2 \end{cases} .$$

5. a) Seja X uma variável aleatória em que $\mu = E(X)$ e em que se verifica que $E(X^2) < +\infty$. Nestas condições, assinale a afirmação verdadeira:
- i)** Existe, necessariamente, o momento de ordem 3 em relação à média.
 - ii)** Sendo $Y = X - \mu$, é certo que $E(Y^2) < +\infty$.
 - iii)** É sempre possível obter μ a partir de $E(X^2)$.
 - iv)** Como $Var(X) > E(X^2)$, então não é possível garantir a existência da variância de X .
 - v)** Calcula-se $E(X^2)$ a partir da relação $E(X^2) = \mu^2 - Cov(X, X)$.
- b) Seja X uma variável aleatória com função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (0 < x < 1) \\ \frac{1}{4} & (1 < x < 4) \end{cases}$$

Calcule $E(X)$. Sabendo que $Z = 3X - \frac{1}{8}Y$ e $E(Y) = 9$, calcule $E(Z)$.

RESPOSTA 5.b) $E(X) = \int_0^1 \frac{x}{2} dx + \int_1^4 \frac{1}{4} dx = \frac{49}{24}$; $E(Z) = 3 \times \frac{49}{24} - \frac{1}{8} \times 9 = 5$

6. Uma determinada loja de telecomunicações vende, entre outros produtos, um determinado modelo de smartphone. Seja X o número de smartphones deste modelo específico recebidos diariamente na loja para venda. Seja Y o número de smartphones deste modelo vendidos diariamente nesta loja. Assuma que (X, Y) é um vetor aleatório com função probabilidade conjunta resumida no quadro seguinte:

$x \backslash y$	0	1	2
0	k	0	0
1	k	k	0
2	k	k	k

- a) Demonstre que $k = 1/6$.
- b) Sabendo que $k = 1/6$, o valor da variância de Y é:
- i) $2/3$.
 - ii) $5/9$.
 - iii) 1 .
 - iv) $13/9$.
 - v) nenhuma das alternativas anteriores.

RESPOSTA 6.a) A função probabilidade conjunta é dada por:

$x \backslash y$	0	1	2	$f_X(x)$
0	k	0	0	k
1	k	k	0	$2k$
2	k	k	k	$3k$
$f_Y(y)$	$3k$	$2k$	k	1

O valor de k obtém-se da seguinte forma: $f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) = 1 \Leftrightarrow k + 2k + 3k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$.

7. Considere que o número de pessoas que compram, pelo menos, uma peça de vestuário na loja FORADEMOMA segue um processo de Poisson com taxa média de 3 por dia.
- a) A probabilidade de 10 ou mais pessoas adquirirem, pelo menos, uma peça de vestuário na loja FORADEMOMA durante uma semana (5 dias) é igual a...
- i) ...0,1185.
 - ii) ...0,9301.
 - iii) ...0,0011.
 - iv) ...0,8815.
 - v) ...nenhuma das alternativas anteriores.
- b) Escolhidos ao acaso 10 dias, qual a probabilidade de não se vender nenhuma peça de vestuário em mais de dois dos dias considerados na loja FORADEMOMA.

RESPOSTA 7.b) Seja Y = "número de dias em que não se vende nenhuma peça de vestuário na loja FORADEMOMA em 10 dias escolhidos ao acaso". Então, $Y \sim B(n = 10; \theta = 0.0498)$ pois $P(X = 0) = 0,0498$. Pretende-se $P(Y > 2)$.

$$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) \approx 1 - 0,9885 = 0,0115$$

8. Um comerciante pretende adquirir tangerinas de um dos pomares A ou B. Como o peso do fruto é factor preferencial, o comerciante toma uma amostra casual de 36 tangerinas (em cada pomar) e escolhe o pomar que corresponde à amostra com maior peso médio. O peso de cada tangerina é normalmente distribuído, com parâmetros resumidos no quadro seguinte:

Pomar	Média (grs)	Desvio Padrão (grs)
A	100	4
B	99	3

- a) Assumindo que as amostras são independentes, qual é a probabilidade (arredondada a 4 casas decimais) do comerciante escolher o pomar B?
 i) 0,1151. ii) 0,8849. iii) 0,4201. iv) 0,5799.
 v) Nenhuma das alternativas anteriores.
- b) Determine a dimensão mínima da amostra a retirar da população de tangerinas do pomar A de modo a que a probabilidade da média amostral se situe entre 98 e 102 gramas com probabilidade maior ou igual a 0,95.

RESPOSTA 8.b)

$$\begin{aligned}
 P(98 < \bar{X}_A < 102) &= P\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{16}{n}}} < \frac{\bar{X}_A - 100}{\sqrt{\frac{16}{n}}} < \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) \\
 &= 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - 1.
 \end{aligned}$$

Pretende-se $2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - 1 \geq 0,95$.

$$\begin{aligned}
 2\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) - 1 &\geq 0,95 \Leftrightarrow \\
 \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}}\right) &\geq 0,975 \Leftrightarrow \\
 \frac{2}{\sqrt{\frac{16}{n}}} &\geq 1,96 \Leftrightarrow \\
 n &\geq 15,366
 \end{aligned}$$

uma vez que a função $\Phi(x)$ é crescente. Consequentemente $n = 16$.