

Cap. 1 Complementos de PL

Sistemas de Apoio à Decisão

Optativa



Complementos de PL



OBJETIVOS

- Formular problemas em PL e em PLI
- Identificar problemas que podem ser resolvidos por PL / PLI
- Resolver problemas de PL/PLI: Solver/Excel; Gráficamente
- Interpretar/Validar soluções
- Utilização de softwares: **GPL**; **Solver/Excel**

Complementos de PL



Modelo de PL na forma *standard*

Dados do problema:

c_j **coeficiente** da j -ésima variável de decisão **na função objetivo**

b_i **segundo membro** ou **termo independente (TI)** da i -ésima restrição funcional

a_{ij} **coeficiente técnico** da j -ésima variável de decisão na i -ésima restrição funcional

Variáveis de decisão: x_j ($j = 1, \dots, n$)

$$Z^* = \text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{Função objetivo (FO)}$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \quad \text{Restrições funcionais} \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \quad \text{Restrições de sinal} \end{cases}$$

3

Complementos de PL



Definições

Solução de um PL - vetor de \mathbb{R}^n cujas componentes representam os valores das variáveis de decisão

Solução Admissível (SA) - solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal)

Solução não admissível (SNA) - solução que não verifica pelo menos uma das restrições

Região admissível (RA) - conjunto de todas as soluções admissíveis

Solução ótima (SO) - uma solução admissível que origina o **melhor valor** para a função objetivo (FO)

Soluções ótimas alternativas - diferentes soluções ótimas de um mesmo problema, caso existam

Valor ótimo - valor da função objetivo numa solução ótima

Restrição saturada numa solução de um problema de PL quando esta a verifica na igualdade

4

Complementos de PL



Hipóteses da PL

Proporcionalidade: A contribuição de cada atividade (j) para o valor da função objetivo e primeiro membro das restrições é proporcional ao nível da atividade

$$a_{ij} x_j; \quad c_j x_j$$

Aditividade: Os valores da função objetivo e do primeiro membro das restrições obtêm-se por soma das contribuições individuais das várias atividades

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2; \quad c_1 x_1 + c_2 x_2$$

Divisibilidade: As variáveis assumem valores em intervalos reais

Certeza: Todos os parâmetros (c_j ; b_i ; a_{ij}) são constantes reais conhecidas

5

Complementos de PL



Propriedades

Propriedade 1: A RA de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo

Propriedade 2: Se a RA de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução ótima

Propriedade 3: Se um problema de PL tem ótimo, então pelo menos um dos pontos extremos da RA é solução ótima

Propriedade 4: Dado um problema de PL com ótimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objetivo, então esse ponto extremo é solução ótima

6

Resolução Gráfica



Resolução Gráfica - 2 Variáveis de Decisão

- 1) $RA = \cap$ de semiplanos definidos por todas as restrições de sinal e funcionais do PL
- 2) Se $RA = \emptyset$ o problema é impossível
- 3) Se $RA \neq \emptyset$ identificar, caso exista, o(s) ponto(s) ótimo(s):
 - Representar uma reta de nível da FO (atribuindo um valor arbitrário a Z) e identificar o sentido de otimização
 - Identificar o(s) ponto(s) da RA a que corresponde o melhor valor de Z (ou seja, identificar as SOs), ou concluir que o problema tem valor ótimo ilimitado (não tem solução ótima)

GPL

7

Resolução no Solver/Excel



Dados

	A	B	C	D	E	F
1	Exemplo 1					Disponibilidades/ Exigências
2		P1	P2			
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	0	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m.)	2	8	0	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	0	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	0		
7	Unidades a produzir de	0	0			

	D
3	=SUMPRODUCT(B3:C3;\$B\$7:\$C\$7)
4	=SUMPRODUCT(B4:C4;\$B\$7:\$C\$7)
5	=SUMPRODUCT(B5:C5;\$B\$7:\$C\$7)
6	=SUMPRODUCT(B6:C6;\$B\$7:\$C\$7)

Valores Iniciais

8

Resolução no Solver/Excel



	P1	P2			Disponibilidades/ Exigências
1 Exemplo 1					
2					
3 Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	0	<=	10
4 Secção de Embalagem (h.m.)	2	8	0	<=	32
5 Imposição de mercado	1	-1	0	>=	2
6 lucro (u.m.)	2	4	0		
7 Unidades a produzir de	0	0			

Solver Parameters dialog box showing the configuration for the Solver. The objective is set to \$D\$6, with 'Max' selected. The variable cells are \$B\$7:\$C\$7. The constraints are \$D\$3:\$D\$4 <= \$F\$3:\$F\$4 and \$D\$5 >= \$F\$5. The 'Add' button is circled in orange.

Add Constraint dialog box showing the configuration for the constraint: Cell Reference: \$D\$3:\$D\$4, Constraint: <=, To: \$F\$3:\$F\$4. The 'Add' button is circled in orange.

9

Resolução no Solver/Excel



Solver Parameters dialog box showing the configuration for the Solver. The objective is set to \$D\$6, with 'Max' selected. The variable cells are \$B\$7:\$C\$7. The constraints are \$D\$3:\$D\$4 <= \$F\$3:\$F\$4 and \$D\$5 >= \$F\$5. The 'Make Unconstrained Variables Non-Negative' checkbox is checked. The 'Solving Method' dropdown is set to 'Simplex LP'. The 'Solve' button is circled in red.

10

Resolução no Solver/Excel



	A	B	C	D	E	F
1	Exemplo 1					Disponibilidades/ Exigências
2		P1	P2			
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	10	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m)	2	8	32	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	6	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	24		
7	Unidades a produzir de	8	2			

Solver Results

Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Keep Solver Solution

Restore Original Values

Return to Solver Parameters Dialog

Outline Reports

OK Cancel Save Scenario...

Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.
When the GRG engine is used, Solver has found at least a local optimal solution. When Simplex LP is used, this means Solver has found a global optimal solution.

11

Resolução no Solver/Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Microsoft Excel 14.0 Answer Report											
2	Worksheet: [ex1_PL.xls]ex1											
3	Report Created: 08-02-2012 11:50:32											
4	Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.											
5	Solver Engine											
6	Engine: Simplex LP											
7	Solution Time: 0 Seconds.											
8	Iterations: 3 Subproblems: 0											
9	Solver Options											
10	Max Time 100 sec, Iterations 100, Precision 0,000001											
11	Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 5%, Solve Without Integer Constraints, Assume NonNegative											
12												
13												
14	Objective Cell (Max)											
15	Cell	Name	Original Value	Final Value								
16	\$D\$6	lucro (u.m.)	0	24								
17												
18												
19	Variable Cells											
20	Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer							
21	\$B\$7	Unidades a produzir de P1	0	8	Contín							
22	\$C\$7	Unidades a produzir de P2	0	2	Contín							
23												
24												
25	Constraints											
26	Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack						
27	\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	\$D\$3<=\$F\$3	Binding	0						
28	\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m)	32	\$D\$4<=\$F\$4	Binding	0						
29	\$D\$5	Imposição de mercado	6	\$D\$5>=\$F\$5	Not Binding	4						
30												

12

Resolução no Solver/Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report							
2	Worksheet: [ex1_PL.xls]ex1							
3	Report Created: 08-02-2012 11:50:32							
4								
5								
6	Variable Cells							
7								
8		Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
9		\$B\$7	Unidades a produzir de P1	8	0	2	2	1
10		\$C\$7	Unidades a produzir de P2	2	0	4	4	2
11								
12	Constraints							
13								
14		Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
15		\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	1,333333333	10	6	2,4
16		\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m.)	32	0,333333333	32	12	12
17		\$D\$5	Imposição de mercado	6	0	2	4	1E+30

13

Complementos de PL



Definições

Forma aumentada de um PL – PL com:

todas as variáveis são não negativas e
todas as restrições funcionais estão expressas por equações



+ variáveis não negativas

variáveis auxiliares ou **variáveis desvio** ou **variáveis de folga**

Solução aumentada - uma solução do problema na forma aumentada.

Propriedades

Propriedade 5: Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

14

Complementos de PL



Passagem de modelos de PL à forma aumentada de maximização

Objetivo: $\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \text{Max}(-Z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$ (Min $Z = -\text{Max}(-Z)$)

Restrições:

$$\text{"}\leq\text{"}: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

$$\text{"}\geq\text{"}: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

Variáveis:

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow x_j = -x'_j (x'_j \geq 0)$$

$$x_j \text{ livre} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j \quad \left(\begin{array}{l} x'_j = \text{Max}\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = \text{Max}\{0; -x_j\} \geq 0 \end{array} \right)$$

15

Complementos de PL



Definições

Dado um PL na forma aumentada com m equações e ℓ variáveis

Igualar a zero $\ell - m$ **variáveis não básicas (VNB)**. Se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes m variáveis - **variáveis básicas (VB)**

→ **Solução básica (SB)**.

Solução básica admissível (SBA) - SB em que todas as variáveis respeitam as restrições de sinal. Caso contrário, é uma **solução básica não admissível (SBNA)**.

1 SBA → 1 ponto extremo da RA

1 ponto extremo da RA → pelo menos uma SBA

Soluções básicas adjacentes - apenas uma VB diferente (\mathbb{R}^2 - extremos do segmento de reta)

16

Dualidade



PRIMAL	DUAL
Maximizar (Max Z)	Minimizar (Min W)
1 restrição	1 variável de decisão
i -ésima restrição de tipo " \leq "	$y_i \geq 0$
i -ésima restrição de tipo " \geq "	$y_i \leq 0$
i -ésima restrição de tipo " $=$ "	y_i livre
Tl: $b_i; i = 1, \dots, m$	FO: $W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$
FO: $Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$	Tl: $c_j; j = 1, \dots, n$
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$	j -ésima restrição de tipo " \geq "
$x_j \leq 0$	j -ésima restrição de tipo " \leq "
x_j livre	j -ésima restrição de tipo " $=$ "
matriz de coeficientes técnicos: A	matriz de coeficientes técnicos: A^T

17

Dualidade



(P) Min $Z \Leftrightarrow$ (D) Max W

Restrição primal de tipo " \geq " \Leftrightarrow variável dual ≥ 0 ;

Restrição primal de tipo " \leq " \Leftrightarrow variável dual ≤ 0 ;

Variável primal ≥ 0 \Leftrightarrow restrição dual de tipo " \leq ";

Variável primal ≤ 0 \Leftrightarrow restrição dual de tipo " \geq ".

O i -ésimo **preço-sombra** (valor ótimo de y_i) representa a proporção de variação no valor ótimo do primal em função do acréscimo no i -ésimo termo independente, compatível com o respetivo intervalo de sensibilidade.

18

Dualidade



Propriedades

Propriedade 6: O dual do dual é o primal.

Propriedade 7: Dado um par de problemas duais, se uma SA do problema de maximização, \mathbf{x}' , tem valor Z' e uma SA do problema de minimização, \mathbf{y}' , tem valor W' , então $Z' \leq W'$.

Se $Z' = W'$, então \mathbf{x}' e \mathbf{y}' são soluções ótimas dos respectivos problemas.

19

Dualidade



	PRIMAL	Tem SA	Não tem SA
DUAL			
Tem SA		Os dois problemas têm SO e $Z^* = W^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA		Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível

Soluções complementares – verificam as **relações de desvios complementares**

Problema (P1)

Dual de (P1)

- i) variável de decisão VB ($\neq 0$) \Rightarrow restrição saturada (variável desvio = 0; VNB)
- ii) restrição não saturada (variável desvio é VB) \Rightarrow variável de decisão = 0 (VNB)

20

Dualidade



Determinação da SOD: $y_i = \Delta Z$ se $\Delta b_i = +1$

Resolvido o Primal:

- **Gráfico** – calcular y_i ; resolver o novo PL alterando $\Delta b_i = +1$. Calcular: $\Delta Z = y_i$.
- **Relações de complementaridade:** Identificar o valor das VNB (= 0) do dual (D), tendo em conta as VB do (P), e resolver o sistema de equações (forma aumentada) do (D).
- **Solver – Relatório de Sensibilidade** – Coluna “Shadow Price”

Interpretação Económica!

21

Análise de Sensibilidade – TI



- A SO é sensível a alterações nos dados (parâmetros) do problema?

Termo Independente: b_i

IS – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um TI mantendo a **base ótima** (o {VNB} e o {VB})

Se $\Delta b_i \in IS$:

- mantem-se base ótima e os preços-sombra (SOD)
- Altera-se: SOP e Z^* , com $\Delta Z = y_i \times \Delta b_i$

22

Coeficiente da FO: c_j

IS – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um c_j mantendo a
base ótima (o {VNB} e o {VB})

Se $\Delta c_j \in IS$:

- mantem-se Base ótima e SOP
- Altera-se: SOD e Z^* , com $\Delta Z = x_j \times \Delta c_j$.

Restrição Adicional & Nova Variável