Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios n^o 4

Noções Topológicas e Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1 *Considere o conjunto* $\boldsymbol{C}$ *das funções contínuas no intervalo* $[0,1]$. *Defina para* $f, g \in C$,

$$d^*(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Mostre que $d^*(f,g)$ *é uma distância.*

Exercício 2 *Considere o conjunto* $\boldsymbol{E}$ *um conjunto qualquer e defina para* $x, y \in E$,

$$d^*(x,y) = \begin{cases} 0 & se \;\; x = y \\ 1 & se \;\; x \neq y \end{cases}.$$

a) Mostre que $d^*(x,y)$ *é uma distância.*
b) Defina a bola de centro em $a \in E$ *e de raio* ε.

Exercício 3 *Considere em* $\mathbb{R}^n$ *as seguintes aplicações*

$$||x||^1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

$$||x||^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$||x||^3 = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$$

a) Mostre que para $i = 1, 2, 3$, $||x||^i$ *define uma norma em* $\mathbb{R}^n$.
b) Para cada uma das normas consideradas calcule $d(x,y) = ||x - y||$.

Exercício 4 *Represente geometricamente os seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *e defina analiticamente o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:*
a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x \leq 2 \text{ e } xy \geq 0\right\}$
b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\right\}$
c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \dfrac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq y + x \leq 1\right\}$
d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } y > 0\right\} \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq 1 \text{ e } x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Exercício 5 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Prove que*

a) A é um conjunto aberto se e só se $A \cap frontA = \varnothing$.

b) A é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R}^n \backslash A$ é um conjunto fechado.

c) Prove, utilizando o resultado anterior, que a intersecção de conjuntos fechados é sempre um conjunto fechado.

Exercício 6 *Considere o seguinte conjunto $X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\right\}$.*

a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a X que convirja para um ponto que não pertence a X.

b) Poderá encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X? Justifique.

Exercício 7 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - \ln(x^2 + y^2)} + \sqrt{x - y}.$$

Determine o domínio de f, D_f, represente-o geometricamente e diga, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.

Exercício 8 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{(1 - x)(1 - y)}.$$

a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.

c) D_f é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

Exercício 9 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \frac{1}{\ln\left(1 - x^2 - (y + 1)^2\right)}.$$

a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

b) Defina analiticamente o interior e a fronteira de D_f.

c) D_f é um conjunto compacto? Justifique.

Exercício 10 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - senx)(y - x^2)}}{\ln(x + y - 2)}.$$

a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

b) Defina analiticamente a fronteira de D_f.

c) D_f é um conjunto aberto? E fechado? Justifique.

Exercício 11 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x,y) = \sqrt{(x-2)\,(16 - x^2 - y^2)}.$$

a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b) Indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

Exercício 12 *Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x,y) = \ln(xy)\sqrt{\left(1 - x^2 - (y-1)^2\right)}.$$

a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.
b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.