Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG

Ficha de exercícios n^o 6

Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1 *Calcule as funções derivadas parciais de 1ª ordem para as seguintes funções, indicando o respectivo domínio:*

a)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{sen\,(xy)}{x} & se \quad x\neq 0 \\ y^2-y & se \quad x=0. \end{cases}$$

b)

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2-yx & se \quad x\neq y \\ x & se \quad x=y. \end{cases}$$

Exercício 2 *Considere a função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Verifique que a função tem derivadas parciais em todo o seu domínio mas não é contínua na origem.

Exercício 3 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & se \quad xy=0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & se \quad xy\neq 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Prove que não existe $f_v^{'}(0,0)$, *qualquer que seja o vector* $v\in\mathbb{R}^2$ *tal que* $v_1v_2\neq 0$.

c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f *no ponto* $(0,0)$*?*

Exercício 4 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

b) Mostre que $f(tx,ty)=tf(x,y)$ *para todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *e todo* $t\in\mathbb{R}$.

c) Utilize a alínea anterior para provar que $f_v^{'}(0,0) = f(v)$ *para todo* $v \in \mathbb{R}^2$.

d) Utilize a alínea anterior para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

e) Estude a diferenciabilidade de f *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 5 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \quad se & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule o gradiente de f *no ponto* $(1,1)$.

c) Estude a diferenciabilidade de f *no ponto* $(0,0)$.

Exercício 6 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right) sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *e mostre que são descontínuas em* $(0,0)$.

c) Verifique que f *é diferenciável na origem.*

Exercício 7 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)}{x+y} & se \quad x+y \neq 0 \\ 0 \quad se & x+y = 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *nos pontos da forma* $(a,-a)$ *com* $a \neq 0$*?*

c) Calcule a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e estude a sua continuidade.*

d) Calcule $f'_{(1,-1)}(2,3)$.

e) Estude a continuidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

f) Estude a diferenciabilidade de f *em* $\mathbb{R}^2$.

g) Calcule $\nabla f(1,0)$.

h) Calcule $f'_{(1,1)}(0,0)$ *e* $f'_{(1,1)}(1,0)$.

Exercício 8 *Seja* h *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e considere a função* f *definida por* $f(x,y) = tg(x)h(x+\cos y)$*. Mostre que para todo o ponto* $(x,y) \in D_f$*, se tem*

$$seny\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)\frac{seny}{senx.\cos x}.$$

Exercício 9 *Seja* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e considere a função* g *definida por* $g(x,y) = f(\frac{y}{x})$. *Mostre que para todo o ponto* $(x,y) \in D_g$*, se tem*

$$x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y).$$

Exercício 10 *Seja* f *uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e considere a função* g *definida por* $g(x,y) = \cos^2 x.f(y{+}tgx)$. *Prove que para todo o ponto* $(x,y) \in D_g$*, se tem*

$$\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2tgx.g(x,y).$$

Exercício 11 *Usando a regra da derivada da função composta, calcule* $\frac{dw}{dt}$ *sabendo que*

$$w = xyf(z), x = t^2, y = e^t, z = \ln t^2,$$

e f *é uma função real de variável real diferenciável.*

Exercício 12 *Seja* F *uma função real de variável real diferenciável e* $z = xy + xF(\frac{y}{x})$. *Mostre que para todo o* $x \neq 0$*, se tem*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

Exercício 13 *Sejam* ϕ, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções de classe* C^2 *e* $z = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$. *Mostre que*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Exercício 14 *Seja* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, uma função de classe* C^1 *e* $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, definida por* $v(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho sen\theta)$. *Mostre que* $\phi = u \circ v$ *é tal que*

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Exercício 15 *Considere as funções,* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $g(x,y,z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1 - xyz^2)$ *e* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma função cuja matriz jacobiana no ponto* $(e^3, 2)$ *é dada por*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ *no ponto* $(1,-1,1)$.

Exercício 16 *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável tal que* $f(1) = f'(1) = 2$ *e* $f(2) = f'(2) = 1$. *Considere* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $g(x,y,z) = (f(x^2) + f(x^2+y^2), f(xyz))$.

a) Calcule a matriz jacobiana de g.

b) Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $h(x,y) = e^{3-x^2+yx}$*, justifique que* $h \circ g$ *é diferenciável no ponto* $(1,1,2)$ *e calcule a matriz jacobiana de* $h \circ g$ *nesse ponto.*

Exercício 17 *Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3}y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(t) = (t,t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(t) = (f \circ g)(t) = f(t,t)$.

a) Indique o valor de $F(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

b) Calcule o valor de $F'(0)$: i) utilizando a expressão de $F(t)$ obtida na alínea anterior; ii) através da regra da derivação da função composta.

c) O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados nas alíneas i) e ii)?

Exercício 18 *Determine os extremantes e correspondentes extremos das funções assim definidas:*

a) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^y$

b) $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

c) $f(x,y,z) = xy + xz$

d) $f(x,y) = xseny$

e) $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$

Exercício 19 *Averigue se o ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é extremante da função $f(x,y,z) = x^2 + 2xy^2 + y^4 + z^2$.*

Exercício 20 *Determine, em função de β, os extremantes da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x,y,z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x.$$

Exercício 21 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por*

$$f(x,y) = e^{xy+xy^2+x^2}.$$

Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

Exercício 22 *Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$.*

a) Prove que os pontos críticos de f são $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(0,0)$.

b) Indique, justificando, se os pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são extremantes da função f e, caso sejam, determine os respectivos valores extremos.

c) Prove que o ponto $(0,0)$ não é extremante da função f.