Cálculo e Instrumentos Financeiros

Capitalização; Regimes; Taxas

Licenciaturas em Economia, Finanças, Gestão

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Programa

1. Capitalização / Acumulação, regimes, taxas
2. Equivalência de capitais
3. Rendas / Anuidades
   - Com termos constantes
   - Com termos variáveis
   - Diferidas
   - Perpétuas
4. Reembolso de empréstimos
5. Leasing
6. Mercado de capitais
   - Obrigações
   - Acções

Bibliografia

Barroso, M.N.; Couto E. & Crespo, N. (2009). *Cálculo e Instrumentos Financeiros*, Escolar Editora, Lisboa.

1. Capitalização, Regimes e Taxas

1.1 Introdução, capitalização/acumulação, actualização
1.2 Regime de Juro simples
1.3 Regime de juro composto
1.4 Taxas de juro
1.5 Desconto simples, taxa de desconto. Relações e aplicações
1.6 Taxa instantânea de capitalização, força de juro

O **Rendimento disponível** das pessoas/organizações pode ser aplicado basicamente de duas formas:

- **Consumo**: Despesa em bens ou serviços durante um período de tempo, que não permite nenhum retorno que não naquilo que dispendeu.
- **Poupança**: Pode ser transformada em liquidez sem qualquer rendimento ou em investimento:

  Aplicação em activos reais ou financeiros com a intenção de adquirir rendimento.

Operação financeira

Acção que tem como objectivo alterar quantitativamente um capital.

Características:

- **Duração/tempo/prazo**: curto, médio, longo prazo, em tempo discreto ou contínuo;
- **Taxa**, normalmente referida a período-base (*período da taxa*);
- **Contingência** quanto à realização/resultado: certa ou aleatória.

Juro

Remuneração do factor **capital** cedido/aplicado temporariamente pelo titular.

Juro é função de: Capital investido; Taxa (de juro); Prazo.

Valor acumulado/capitalizado

Alteração quantitativa um capital, ao fim de determinado prazo, (**vencimento**).

Características:

- Capital Acumulado = Capital Inicial + Juro. Ao fim de n períodos de tempo:
$$C_n = C_0 + J.$$
- Capital Actual: $C_0 = C_n - J$ (Operação em sentido inverso);
- Desconto: $D = C_n - C_0$;
- Em rigor, Actualização e Desconto são operações distintas.

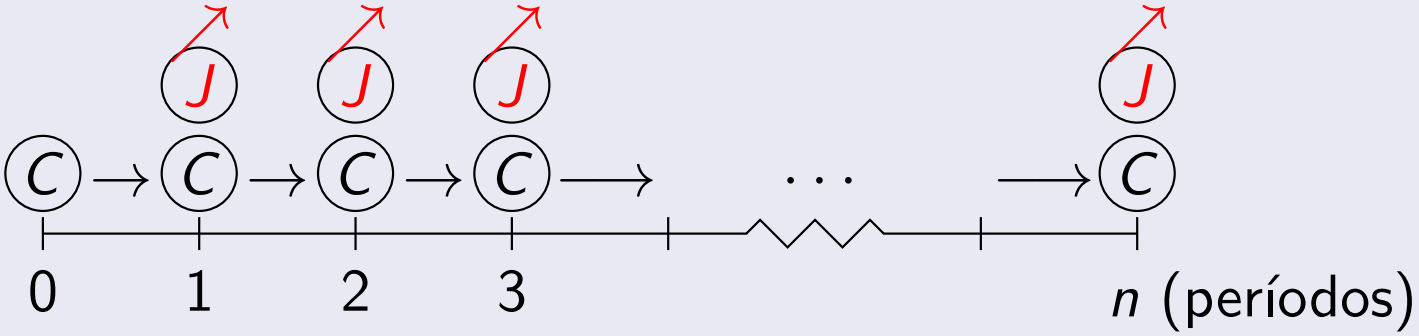
Regimes de capitalização ou acumulação

- **Regime Simples:** O juro sai do circuito de acumulação na data do seu vencimento;
- **Regime Composto:** No vencimento, os juros são integrados no circuito de capitalização (*os juros vencem juros*)

Simplificação: Tempo medido em unidades discretas, $n = 0, 1, 2, \cdots$, taxa i constante.

Regime simples

O capital aplicado permanece constante durante o prazo da aplicação, os juros à data do vencimento saem do processo.



Fórmula geral do juro ao fim de n períodos (anos)

$$\begin{aligned} J &= C_0 \times n \times i_A = C_0 \times i_{nA} \Rightarrow \\ C_n &= C_0 + J = C_0 \left(1 + n \cdot i_A\right) \end{aligned}$$

C_0: Capital inicial; C_n: Capital acumulado no ano n; A: Período da taxa, Ano; i_A: Taxa de juro anual (período da taxa); n: Prazo.

A Fórmula de Capitalização pode generalizar-se para tempo contínuo, $t \geq 0$, unidade de tempo referêncial da taxa:

Expressão geral de capitalização, Valor Acumulado/Capitalizado

$$C_t = C_0 \left(1 + t \cdot i_A\right) \,, \;\; t \geq 0 \,.$$

Expressão geral de actualização, Valor Presente/Actual

$$C_0 = C_t \left(1 + t \cdot i_A\right)^{-1} = \frac{C_t}{\left(1 + t \cdot i_A\right)} \,, \;\; t \geq 0 \,.$$

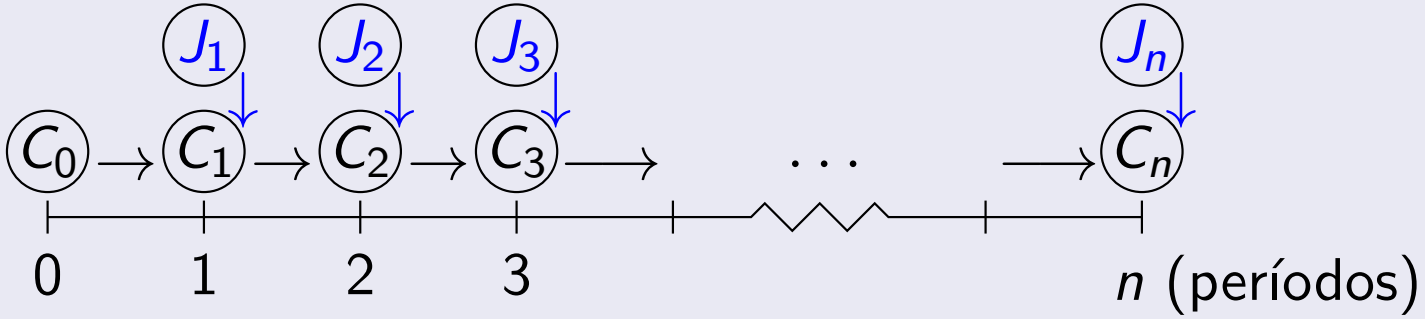
Factor de capitalização anual: $\left(1 + i_A\right)$

Factor de actualização anual: $v = \left(1 + i_A\right)^{-1} = \frac{1}{(1+i_A)}$

Para simplificação: Taxa i constante, tempo discreto $n = 0, 1, 2, \cdots$, unidade de tempo da taxa.

Acumulação em **juro composto**

Os juros vencidos vão sendo incluídos no circuito de capitalização.
Sequência: $C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_n$.



$$
\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + J_1 = C_0 + C_0\, i = C_0\,(1+i) \\
C_2 &= C_1 + J_2 = C_1\,(1+i) = C_0\,(1+i)^2 \\
C_3 &= C_2 + J_3 = P_2\,(1+i) = C_0\,(1+i)^3 \\
&\ldots \\
C_n &= C_{t-1} + J_t = C_{t-1}\,(1+i) = C_0\,(1+i)^n\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

A fórmula pode generalizar-se para tempo contínuo, $t \geq 0$:

Expressão geral de capitalização, i_A: taxa efectiva

$$\begin{aligned} C_t &= C_0 (1+i_A)^t, \quad t \geq 0 \ (anos); \\ C_n &= C_0 (1+i_A)^n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ C_n &= C_0 + \sum_{k=1}^{n} J_k; \quad J_k : \text{ juro no período } k \end{aligned}$$

Expressão geral de actualização, valor presente/actual

$$\begin{aligned} C_t &= C_0 (1+i_A)^{-t} = \frac{C_n}{(1+i_A)^t}, \quad t \geq 0 \ (anos); \\ C_0 &= C_n (1+i_A)^{-n} \\ &= C_n - \sum_{k=1}^{n} J_k; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Factor de capitalização anual: $(1 + i_A)$

Factor de actualização anual:

$$v = (1 + i_A)^{-1} = \frac{1}{(1 + i_A)}$$

Expressão geral de actualização

$$C_0 = C_n v^n = C_n (1 + i_A)^{-n}$$

Juro Total ao fim de n anos

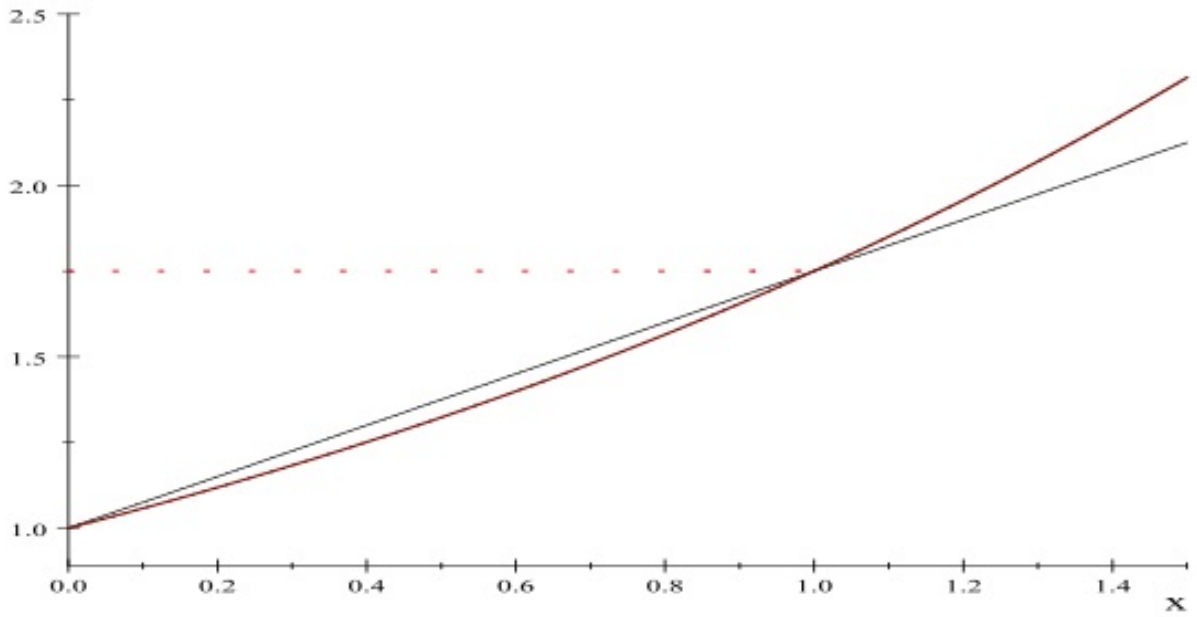
$$J = C_n - C_0 = C_0 (1 + i_A)^n - C_0 = C_0 [(1 + i_A)^n - 1]$$

Juro no período n

$$C_{n-1} \times i = C_0 (1 + i)^{n-1} \times i$$

Regime de Juro Simples vs Composto. i_A: tx. juro/unidade de tempo

- Regime Simples: $C_t = C_0(1 + i_A\, t)$,
- Regime Composto: $C_t = C_0(1 + i_A)^t$, $t \geq 0$



É mais vantajoso aplicar um capital C_0 em Regime Simples para prazos inferiores a 1 ano (período da taxa). Em Regime Composto para prazos superiores.

Example ($i_A = 30\%$)

t anos	R. Simples	R. Composto	dif. C-S
0	€100 000	€100 000	0
0,01	100 300	100 263	-37
0,1	103 000	102 658	-342
0,2	106 000	105 387	-613
0,4	112 000	111 065	-935
0,5	115 000	114 018	-982
1	130 000	130 000	0
2	160 000	169 000	9 000
4	220 000	285 610	65 610
10	400 000	1 378 585	978 585

Regime Simples: $C_t = C_0(1 + i_A\, t)$, i: tx. Juro por período
Regime Composto: $C_t = C_0(1 + i_A)^t$, $t \geq 0$

- O **Regime Simples** é por vezes utilizado:
  - Em períodos de tempo inferiores ao ano, fracções do ano;
  - Transacções financeiras de curto prazo
- Um **Regime Misto** poderia ser usado:
  - O Regime Composto para períodos inteiros e
  - O Regime Simples para fracções do período

Example (Capitalização em 4 anos 5 meses)

$$C_{4+5/12} = C_0(1 + i)^4[1 + (5/12)i].$$

Tipos/relações comuns:

Taxas Proporcionais; Taxas Equivalentes; Taxa Efectiva; Taxa Nominal; Taxa Instantânea; Taxa de Desconto; Taxas legais.

Definição (Taxas proporcionais)

Duas taxas dizem-se **proporcionais** *quando, sendo de períodos diferentes, existe entre elas uma relação proporcional entre a taxa e o respectivo período.*

Exemplo

Uma taxa anual, i_A, é proporcional a uma taxa trimestral, i_T, quando $i_A = 4\, i_T$. Quando uma taxa anual de 8% corresponde a uma taxa trimestral de 2% temos taxas proporcionais.

Definição (Taxas equivalentes)

Duas taxas, de períodos diferentes, são **equivalentes** *quando aplicadas durante o mesmo prazo e ao mesmo capital, têm igual valor acumulado (ou actualizado) .*

Regime Simples: taxas proporcionais são equivalentes: $C_n = C_0\,(1 + n \cdot i_A)$. No **Regime Composto** nã:o

Exemplo (Regime simples, $i_A = 5\%, i_T = 1,25\%$)

$$100(1 + i_A) = 100(1,05) = 100(1 + 4\,i_T) = 100(1,05) = 105$$

Exemplo (Regime composto)

$C_0 = 1000,00€$, *acumulação semestral,* $i_S = 0.05$, *prazo 1 ano. Taxa equivalente anual,* i_A*:*

$$\begin{aligned} 1000,00(1.05)^2 &= 1102,50€; \quad 1000,00(1.1) = 1100,00€ \\ 1000,00(1 + i_A) &= 1102,50€ \Leftrightarrow i_A = 0,1025 \longrightarrow 10,25\% \end{aligned}$$

Regime composto; Fórmula geral

Relações entre Taxas Equivalentes

Sejam duas subdivisões do ano (A) em m e n sub períodos.

$$\left.\begin{array}{r}(1+i_{A/m})^m = 1+i_A \\ (1+i_{A/n})^n = 1+i_A\end{array}\right. \Rightarrow (1+i_{A/m})^m = (1+i_{A/n})^n$$

$$1+i_{A/m} = (1+i_{A/n})^{n/m} \Leftrightarrow (1+i_{A/m})^{m/n} = 1+i_{A/n}$$

$$\begin{aligned} i_{A/m} &= (1+i_{A/n})^{n/m} - 1 \\ i_{A/n} &= (1+i_{A/m})^{m/n} - 1 \end{aligned}$$

Taxas Efectivas e Taxas Nominais

Amiúde, apresentam-se aos clientes taxas proporcionais (**Taxas Nominais**) às **Taxas Efectivas**.

Exemplo (Ex. anterior)

$C_0 = 1000,00€$, *acumulação semestral, taxa semestral de 5%, durante 1 ano. Taxa proporcional anual 10%.*

- *Taxa nominal anual, com capitalizações semestrais:* 10%;
- *Taxas Efectivas: anual,* $10,25\%$*; semestral,* 5%.

Definição (Taxa Nominal, $i_A^{(m)}$)

Taxa nominal anual com capitalizações *(semestrais, trimestrais, mensais...) ou* **convertível ao período** *da aplicação (semestralmente, trimestralmente,...): Taxa proporcional anual, calculada proporcionalmente ao período de acumulação.*
m: Nº de subdivisões do ano

Exemplo

Um investidor quer aplicar um capital durante um ano e fez um depósito a prazo com juros trimestrais. A taxa indicada pelo banco é de 4% ao ano com juros trimestrais. **4% é a taxa nominal (anual convertível trimestralmente)**. *A taxa de juro indicada é anual mas os juros são calculados por trimestre, a uma* **taxa efectiva de 1% ao trimestre**.

Taxa Efectiva trimestral: $i_T = \frac{0{,}04}{4} = 0,01$

Taxa Nominal anual convertível ao trim.: $i_A^{(4)} = 0,04$

Taxa Equivalente anual: $i_A = 0,040604 = (1,01)^4 - 1$

Seja um período (ano) subdividido em m sub-períodos de capitalização:

- $i_A^{(m)}$: Taxa nominal anual convertível ao sub-período

Seja um período (ano) subdividido em m sub-períodos de capitalização:

- $i_A^{(m)}$: Taxa nominal anual convertível ao sub-período
- $i_. = \frac{i_A^{(m)}}{m}$: Taxa efectiva do sub-período (Ex: taxa efectiva mensal$\rightarrow i_M = \frac{i_A^{(m)}}{12}$).

Seja um período (ano) subdividido em m sub-períodos de capitalização:

- $i_A^{(m)}$: Taxa nominal anual convertível ao sub-período
- $i_{.} = \frac{i_A^{(m)}}{m}$: Taxa efectiva do sub-período (Ex: taxa efectiva mensal$\rightarrow i_M = \frac{i_A^{(m)}}{12}$).
- Equivalência$\rightarrow 1 + i_A = \left(1 + \frac{i_A^{(m)}}{m}\right)^m$.

Taxa Euribor. Taxa de juro de referência

- Taxa que serve de referência (serve de idexante a taxas de mercado bancário)
- **Eur**o **I**nter**b**ank **O**ffered **R**ate, divulgada por *European Banking Federation*, (às 11h CET);
- É uma taxa média de taxas praticadas por um painel de bancos, instituições mais activas no mercado monetário do Euro;
- Painel formado por um conjunto de bancos de países da UE + uns bancos internacionais (que tenham pelo menos uma sucursal num país da "zona Euro");

Taxas *legais*: São *Taxas de Custo*, não de Juro, em geral:

- Incorporam todos os custos, duma transação de capital
- Juro: Por definição, apenas a remuneração do capital

TAEG: Taxa Anual de Encargos Efectiva Global.

Usada nos **empréstimos ao consumo, habitação**

- Taxa incorpora todos os custos associados ao crédito
- Estes custos incluem juros e outras despesas a pagar pelo crédito.
- Expressão (Dec-lei 3259/91):

$$\sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_k}{(1+t)^{y_{k'}}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(1+t)^{y_k}}$$

A_k : Montante de empréstimo k; A'_k: Reembolso ou pagamento de encargos k; m: n^o de empréstimo; $m'-$n ^{o} de reembolsos/encargos; y_k- anos do empréstimo k; $y_{k'}-$anos dos reembolsos/encargos k'; $t-TAEG$.

Exemplo (Ex.5.2)

Empréstimo ao consumo de 4500,00€, prazo 9 meses. Liquidação total na data de vencimento: capital em dívida, juros em Regime Simples à taxa anual de 9,2%. Encargos: admin. 45,00€, gestão 18,25€, despesas de reembolso 8,45€, Imposto 4% .

- Cálculo de C_n, valor da dívida final:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 + (\mathrm{J} + \mathrm{IS}) + \mathrm{EA} + \mathrm{EG} + \mathrm{DR} \\ &= 4500 + 4500 \times \frac{9}{12} \times 0,092(1 + 0.04) + 45 + 18,25 \\ &\quad +8,45 \quad = 4894,62€ \end{aligned}$$

- **TAEG,** i_{TAEG}:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 \left(1 + i_{TAEG}\right)^n = 4500 \left(1 + i_{TAEG}\right)^{9/12} \\ i_{TAEG} &= 11,86\% \Longrightarrow \mathrm{TAEG} : 11,86\% \end{aligned}$$

TAE: Taxa Anual Efectiva.

Taxa semelhante à *TAEG*, mas exclui imposto.
TAE: Expressão (Dec-lei 220/94):

$$\sum_{k'=1}^{m'} \frac{R_k}{(1+r)^{y_k}} = \sum_{q=1}^{p} \frac{D_q}{(1+r)^{y_q}}$$

$m-$n^o de recebimentos do cliente; R_k-recebimento k; $y_{k'}-$prazo (dias) do recebimento k; $p-$n^o
de pagamentos do cliente; D_q-valor do pagamento q; $y_{q'}-$prazo (dias) do pagamento q; $r-TAE$.

Exemplo (Ex.5.2 (cont.))

Cálculo do novo $C'_n = C_n - IS = 4894,62 - 12,42 = 4882,20$.

$$4882,20 = 4500\,(1+i_{TAE})^{9/12} \iff i_{TAE} \simeq 11,48\%$$

TANB: Taxa Anual Nominal Bruta

É uma taxa nominal, neste caso definida por lei para as **Aplicações Financeiras**

- Taxa que as instituições bancárias comunicam aos seus clientes;
- Trata-se de uma taxa anual e nominal, não considera o período efectivo da aplicação;
- É uma taxa bruta, não está expurgada de IRS (retido na fonte).

- Por definição, o **juro** é calculado através de uma taxa com base no Capital Inicial, C_0, com vencimento no fim do período.
- Por vezes, há transações que exigem que a *remuneração* seja paga *à cabeça*:

Exemplo

O Sr. Xis pede emprestado **€1000** *prometendo devolver no fim do ano. Acorda pagar "***10% à cabeça***", e devolver* **€1000** *no final.*

- *Recebe no início* $C_0 = 900€$ *apenas, e paga* $C_1 = 1\,000€$ *no fim do ano. A* **taxa de juro** *efectiva é*

$$i = \frac{C_1 - C_0}{C_0} = \frac{100}{900} = \frac{1000 - 900}{900} = \frac{1}{9} = 0.111(1) \simeq \mathbf{11.1\%}\,;$$

- **10%** *é uma* **taxa de desconto** *e* $11,1(1)\%$ *é uma* **taxa de juro***:*

$$900(1 + 0.111(1)) = 1000€. \ \textit{Desconto} = 100€$$

Taxa de juro e taxa de desconto, mesmo período de referência

- **Taxa de Desconto**, d:

$$d = \frac{\textbf{desconto}}{\text{v. final}} = \frac{C_1 - C_0}{C_1} \Leftrightarrow C_0 = C_1 (1 - d)$$

- **Taxa de Juro**, i:

$$i = \frac{\textbf{desconto}}{\text{v. inicial}} = \frac{C_1 - C_0}{C_0} \Leftrightarrow C_0 = C_1 (1 + i)^{-1}$$

- $\Rightarrow C_1 (1 - d) = C_1 (1 + i)^{-1}$
- $$d = \frac{i}{1 + i} \Leftrightarrow i = \frac{d}{1 - d} \; ;$$
- $$d = \frac{C_1 - C_0}{C_1} \quad \text{e} \quad i = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$$

Desconto por dentro; Desconto por fora

- Associado ao **Regime de Juro Simples**, taxas proporcionais.
- Procedimentos aplicados em operações de curto prazo (e.g. letras comerciais, *com juro à cabeça*)
- A *remuneração* tem por base o capital final, verdadeiramente, aplica-se uma **taxa de desconto**. Seja d.

Desconto por dentro ($\mathbf{D_d}$) e Desconto por fora ($\mathbf{D_f}$)

- $\mathbf{D_d}$: Corresponde ao desconto simples atrás tratado;
- $\mathbf{D_f}$: Matemáticamente corresponde ao equivalente de juro simples mas calculado sobre a quantia líquida inicial C_0. De outra forma, pagamento do desconto actualizado ao início do período. A taxa de actualização é a própria d, tal como foi definida anteriormente. Na prática corresponde a uma taxa d' sobre C_1:

$$C_1\ d' = C_1 \frac{d}{(1+d)}\ .$$

Desconto por dentro ($\mathbf{D_d}$), Desconto por fora ($\mathbf{D_f}$):

$$\mathbf{D_d} = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad \mathbf{D_f} = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- A remuneração é o **desconto**. Recebe emprestado C_0 e devolve C_1:

$$\begin{aligned} D_d &= \frac{C_1 \times d}{1+d}; \qquad D_f = C_1 \times d. \\ C_0 &= C_1 - \frac{C_1 \times d}{1+d} = C_1 \left(\frac{1}{1+d}\right) \Leftrightarrow C_0(1+d) = C_1 \end{aligned}$$

- O $\mathbf{D}_d$ é a remuneração de C_1 actualizada. $\mathbf{D}_f$ não é actualizada.
- $C_0(1+d) = C_1$, ou seja d funciona como *taxa de capitalização* sobre a quantia líquida inicial C_0.
- No $\mathbf{D_d}$ a tx. de desconto é igual à taxa de juro, $d = i$. No $\mathbf{D}_f$: $i > d$.

Exemplo (Ex 1.5)

O Sr. Henrique aceitou uma letra €20 000 por conta de dívida que vence daqui a 3 meses. Descontou (D_d) a letra junto do Banco a uma taxa de 15% ao trimestre, juros à cabeça. Na data de vencimento a dívida vale $C_1 = 20\,000$, o banco só creditou $C_0 = 17391,3$, descontou $D_d = 20\,000 - 17\,391,3 = 2608.7$ no momento 0:

$$\begin{aligned}(1+i)C_0 &= C_1 \Leftrightarrow C_0 = 20000/1,15 = 17\,391,3\\ D_d &= 20\,000 - 17\,391,3 = 2\,608.7 \rightarrow 17391 \times 1.15 = 20\,000\end{aligned}$$

No **Desconto por dentro**, $d = i$. *Em* **Desconto por fora**:

$$\begin{aligned}D_f &= 20000 \times 0.15 = 3000 \Rightarrow C_0 = 20000 - 3000 = 17000\\ 20000 &= 17000(1+i) \Leftrightarrow i = 0,176\,47 \Rightarrow 17,6\,5\%\end{aligned}$$

A taxa de juro é $17,6\,5\%$ *e a taxa de desconto é* 15%

Definição (Letra de câmbio)

Título de crédito pelo qual o sacador dá ordem ao sacado, ou ao avalista em caso de incumprimento, para pagar determinada quantia ao legítimo portador no **vencimento**.

Agentes:

- **sacador**: credor;
- **sacado**: devedor;
- **tomador** ou **endossado**: possuidor do título, podem ser transferidas (endossadas);
- **avalista**: substitui o devedor em caso de incumprimento.

Desconto de Letras

Quatro modalidades de **vencimento**:

1. **À vista** – a letra é pagável no momento da sua apresentação a pagamento;
2. **A um certo termo de vista** – a letra é pagável num determinado prazo a contar da data do aceite;
3. **A um certo termo de data** – a letra é pagável num determinado prazo a contar da data do saque (ordem de pagamento);
4. **Num dia fixado** – dia fixado entre o sacador e o sacado

Desconto de Letras: Endosso ao Banco

- Realização antecipada do capital (V. Actual)
- Banco recebe **Juros+Comissão** (antecipação e serviço)
- O sacado paga ao Banco no prazo estipulado.

Exemplo (Ex. 5.5, Aceite de letra, VN: €8 500, 00)

Quando faltavam 144 dias para o vencimento, faz o desconto no Banco. Encargos: Tx. Juro: 6,9%; CC: 0,8%; IS: 4,0%; O.E:, Portes: €1, 50.

a) Desconto Bancário *(DB)*

Juros (J): Desconto por Fora s/ o V.n. Prazo: base, ano civil (365 d) + 2 dias (legal):

$$J = Vn.\frac{n+2}{365} \times i_A = 8500 \times \frac{146}{365} \times 0,069 = 234,60€$$

Comissão de Cobrança (CC): taxa de comissão (txCC) s/ o Vn.

$$CC = Vn.TxCC = 8500 \times 0,008 = 68,00€$$

Imposto de Selo (Is): taxa (txis) sobre as receitas banco:

$$Is = txis.(J + CC) = 0,04.(234,60 + 68,00) = 12,10€$$

OE: € $OE = 1,50$. *DB:* $DB = J + CC + Is + OE = €316,20$

Exemplo (Ex. 5.5, Cont.)

b) *O* **Produto Líquido de Desconto**:
$PLD = Vn - DB = 8500 - 316,20 = 8.183,80€$. *Valor nominal de 8500,00 euros, o Sr. Cebola receberia antecipadamente 8183,80€.*
As taxas TAE, TAEG e Real, permitem quantificar os diferentes custos da operação bancária de desconto de letras:
A) **Taxa Real** i_{REAL}, *em Regime Simples*

$$\begin{aligned} Vn &= PLD\ (1 + \frac{n+2}{365} \cdot i_{REAL}) \Leftrightarrow 8500 = 8183,80(1 + \frac{146}{365} \cdot i) \\ &\Rightarrow i_{REAL} \rightarrow 9,659\% \end{aligned}$$

B) **TAEG**, *em Regime composto*

$$\begin{aligned} Vn &= PLD(1 + i_{TAEG})^{\frac{n+2}{365}} \Leftrightarrow 8500,00 = 8183,80(1 + i_{TAEG})^{\frac{146}{365}} \\ & i_{TAEG} \rightarrow 9,941\% \end{aligned}$$

Taxa efectiva anual, i_A, "vs" taxa nominal anual, $i_A^{(m)}$

$$
\begin{aligned}
1 + i_A &= \left(1 + \frac{i_A^{(m)}}{m}\right)^m \\
i_A^{(m)} &= m\left[(1+i_A)^{1/m} - 1\right] \\
i_A^{(m)} &= \frac{\left[(1+i_A)^{1/m} - 1\right]}{\frac{1}{m}}
\end{aligned}
$$

Calculemos o limite, $\lim_{m\to\infty} i_A^{(m)}$, directamente (indeterminação):

$$
\lim_{m\to\infty} i_A^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left[(1+i_A)^{1/m} - 1\right]}{\frac{1}{m}} = \frac{0}{0}
$$

Aplicando a regra de *l'Hôpital*, o limite mantém-se.

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} i_A^{(m)} &= \lim_{m\to\infty} \frac{\left(\left[(1+i_A)^{1/m}-1\right]\right)'}{\left(\frac{1}{m}\right)'} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{m}\ln(1+i_A)}-1\right)'}{-\frac{1}{m^2}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{\left[e^{\frac{1}{m}\ln(1+i_A)}\ln\left(1+i_A\right)\right]\left(-\frac{1}{m^2}\right)}{\left(-\frac{1}{m^2}\right)} \\
&= \lim_{m\to\infty} (1+i_A)^{1/m}\ln\left(1+i_A\right) \ .
\end{aligned}$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} i_A^{(m)} &= \lim_{m\to\infty} (1+i_A)^{1/m}\ln\left(1+i_A\right) = (1+i_A)^{1/\infty}\ln\left(1+i_A\right) \\
i_A^{(\infty)} &= \delta = \ln\left(1+i_A\right)
\end{aligned}$$

Taxa Instantânea de Capitalização ou **força de juro** (constante)

ou **taxa anual nominal "com capitalização contínua"**

$$\begin{aligned} \delta &= i_A^{(\infty)} = \ln(1+i) \\ e^{\delta} &= (1+i_A)\,. \end{aligned}$$

Outras igualddades

$$\begin{aligned} C_t &= C_0(1+i_A)^t\,, \quad (t \text{ anos}) \\ C_n &= C_0 e^{\delta n} \\ \ln C_t &= C_0 + t\,\ln(1+i) \\ \frac{d}{dt}\ln C_t &= \ln(1+i) \end{aligned}$$

Se em vez da taxa anual, i_A, tivermos uma taxa relativa a fração de ano, $i_{A/m}$

$$1 + i_A = (1 + i_{A/m})^m \Rightarrow$$

$$\delta_A = \ln(1 + i_A)$$
$$\delta_A = \ln\left[(1 + i_{A/m})^m\right] = m \ln\left[(1 + i_{A/m})\right] = m\,\delta_{A/m}\,.$$

Exemplo (1.18)

Valor acumulado de aplicação de 5 000€, para $n = 5$ anos e Taxa instantânea de capitalização, de 5,5%?

$$C_5 = 5000e^{0,055\times 5} = 6582,65€$$
$$i_A = e^{\delta} - 1 = e^{0.055} - 1 \Rightarrow 5,65\% \quad \textit{aprox.}$$

$$\delta_A = 0.055 \Rightarrow$$
$$\delta_T = 0.055/4 = 0.013\,75 \Rightarrow i_T = e^{0.013\,75} - 1 \Rightarrow 1,384\,5\%.$$

1. Capitalização, regimes e taxas

1. Capitalização / Acumulação, regimes, taxas
2. Equivalência de capitais
3. Rendas / Anuidades
   - Com termos constantes
   - Com termos variáveis
   - Diferidas
   - Perpétuas
4. Reembolso de empréstimos
5. Leasing
6. Mercado de capitais
   - Obrigações
   - Acções