Cálculo e Instrumentos Financeiros

Equivalência de Capitais

Licenciaturas em Economia, Finanças, Gestão

2. Equivalência de Capitais

Capitais Equivalentes

Dois capitais são equivalentes se, reportados à mesma data, apresentarem valores iguais.

Data de Referência

Data de reporte do valor de dois ou mais capitais. (Data de efectuação dos cálculos, actualizando e/ou capitalizando).

Equação do Valor ou de Equivalência

Equação que permite estabelecer a igualdade entre os capitais.

- Em regime composto ou simples. Em regime composto, a data de referência não tem influência na equivalência dos capitais. Relevante são: **datas de vencimento** dos capitais, **valores** e **taxas de juro**.

Valor de um conjunto de capitais

Valor que assumem num momento de referência.

Exemplo (Ex 2.1)

Seja uma uma dívida de €100 000, 00 com data de pagamento daqui a um ano. Proposta alternativa: pagamento de €92.000, 00 hoje.

- *Considerando uma taxa de 10% ao ano, será que estes dois valores são equivalentes? (Regime composto).*

$$C_0 = 100000(1 + 0,10)^{-1} = 90909,09€ \neq 92000€$$

Conclusão: à taxa de 10% não são equivalentes.

- *Haverá uma taxa para a qual os 2 capitais sejam equivalentes?*

$$\begin{aligned} 92000 &= 100000(1 + i_A)^{-1} \Leftrightarrow (1 + i_A)^1 = 100000/92000 \\ i_A &= 0,086957 \Longrightarrow 8,6957\% \end{aligned}$$

Exemplo (Ex 2.2)

Empresa $\sigma\alpha$ tem a pagar dentro de um ano €2 200, 00.
Alternativa: Pagar hoje €2 000, 00. Taxa de 12%.

1. *Actualizar 2200,00 para hoje (data de referência):*

$$C_0 = 2200,00(1+0,12)^{-1} = 1964,29€ < 2000,00€$$

2. *Capitalizar à data de referência, daqui a 1 ano:*
   $C_1 = 2000,00(1+0,12) = 2240,00 > 2200,00€.$

Os 2 capitais não são equivalentes... Opção: **pagar daqui a 1 ano**! *Considere agora taxa de 10%:*

1. $C_0 = 2200,00(1+0,1)^{-1} = 2000,00€$
2. $C_1 = 2000,00(1+0,1) = 2200,00€$

Os capitais assim são equivalentes. E se a taxa for menor? (A escolha da taxa adequada é fundamental).

Definição (Capital comum)

Chama-se **capital comum** *à soma de um determinado conjunto de capitais, referidos a momentos distintos, actualizados (ou capitalizados) para um* **momento comum** *(ou seja, a data de* **vencimento comum***). (Muitas vezes é o momento presente)*

Exemplo (Ex 2.5)

- *A Sociedade Betalfa tem a receber da família Silva três quantias, que incluem capital e juros, estes calculados à taxa de juro de 8% ao ano, nas seguintes datas:*
  1. $k_1 = 1000€$ *daqui a 6 meses;* $n_1 = 1/2$
  2. $k_2 = 2000€$ *daqui a 18 meses;* $n_2 = 3/2 = 1\frac{1}{2}$
  3. $k_3 = 3000€$ *daqui a 21 meses;* $n_3 = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.
- *Qual é o valor destes três capitais na data actual, ou seja, qual o valor da dívida actualmente? Ou... Se o devedor pretender liquidar já, hoje, a totalidade da dívida, quanto deverá pagar?*

Exemplo (Ex 2.5. Regime composto, cont.)

1. **Valor presente ou actual**

$$k_{1;0} = \frac{1000}{1{,}08^{1/2}} = 962,25; \quad k_{2;0} = \frac{2000}{1{,}08^{3/2}} = 1781,95$$
$$k_{3;0} = 3000(1,08)^{-7/4} = 2621,98€$$

2. **Capital comum**: $CC_0 = k_{1;0} + k_{2;0} + k_{3;0} = 5366,18€$

3. *Se o devedor pretender pagar a dívida de uma só vez, entregando a quantia única de $k = 7000€$, em que data deverá fazê-lo? (Um)* **Vencimento comum,** *n:*

$$\begin{aligned} k_1(1+i)^{-n_1} + k_2(1+i)^{-n_2} k_3(1+i)^{-n_3} &= k(1+i)^{-n} \\ 1(1.08)^{-0{,}5} + 2(1.08)^{-1{,}5} + 3(1.08)^{-1{,}75} &= 7(1.08)^{-n} \\ -n \ln 1.08 &= \ln(0.766597) \\ n &= 3.453621 \end{aligned}$$

Resposta: *3 anos, 5 meses e 13 dias*

Definição (Vencimento médio)

O **vencimento médio** *(caso particular do vencimento comum) é um prazo médio das dívidas ou aplicações (em juro composto), i.e., é* **o prazo** t **para qual o capital comum (***numa pré-fixada data de referência***) é igual à soma dos valores nominais dos vários** m **capitais,** $k_1, k_2, ..., k_m$, **reportada à data de referência**. *Seja, a data de referência no momento* 0*:*

$$t : k(1+i)^{-t} = (k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_m)(1+i)^{-t} = CC_0$$

Exemplo (Ex 2.5)

Reportemos todos os capitais à data de referência, momento 0:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1000; \;\; k_2 = 2000; \;\; k_3 = 3000; \;\; k = 6000 \\ 6000(1,08)^{-t} &= 1000(1,08)^{-0,5} + 2000(1,08)^{-1,5} + 3000(1,08)^{-1,75} \\ 6000(1,08)^{-t} &= 5366,18€ \\ t &= 1,450651 \; anos \longrightarrow \textit{1 ano, 5 meses e 12 dias} \end{aligned}$$

Definição (Taxa interna de capitalização [**TIC**])

Taxa de juro que permite equivaler um Capital Comum, a outro ou vários capitais, referindo a determinada data.

Exemplo (**Ex 2.6**)

As seguintes quantias vencem: **1.** $k_1 = 2000€$ *daqui a 1 ano;* **2.** $k_2 = 3000€$ *daqui a 2 anos;* **3.** $k_3 = 5000€$ *daqui a 3 anos*
O contrato foi renegociado e o devedor acordou pagar uma só quantia de 9.000€ *daqui a 6 meses. Qual a taxa?*

$$\begin{aligned} 2000(1+i_A)^{-1}+3000(1+i_A)^{-2}+5000(1+i_A)^{-3} &= 9000(1+i_A)^{-\frac{1}{2}} \\ 2v^1+3v^2+5v^3 &= 9v^{1/2} \\ 2(1+i)^{-1/2}+3(1+i)^{-3/2}+5(1+i)^{-5/2} &= 9 \end{aligned}$$

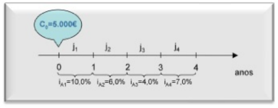
Resposta: $i \simeq 0.0609 \Rightarrow 6,09\%$ *aprox. Resolução ou com calculadora (por tentativas), ou software: Excel-função* **IRR/TIR**.

Definição (Taxa média de um só capital)

A taxa que, aplicada a um capital, produz o mesmo valor (acumulado ou actualizado) que diversas taxas aplicadas ao mesmo capital, durante igual período de tempo.

Exemplo (Ex 2.7 (R. Juro Simples))

A empresa α-κ *aplicou* €5 000, 00 *durante 4 anos, às taxas:*



$$i_{A1} = 10\%; \qquad i_{A3} = 4\%;$$
$$i_{A2} = 6\%; \qquad i_{A4} = 7\%.$$

Determine qual a taxa média equivalente a estas quatro taxas.

Juro total: $\sum_{k=1}^{4} j_k = 5000 \sum_{k=1}^{4} i_{A,k} = 1350.$

J. médio: $\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} j_k = 337,50€$

Tx. média anual: $\bar{\imath}_A = \frac{337,50}{5000} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{4} i_{A,k} = 0,0675 \Rightarrow 6,75\%.$

Alternativa, média aritmética das taxas: $\frac{10\%+4\%+6\%+7\%}{4} = 6.75\%.$

Exemplo (Ex 2.8 (R. Juro Composto))

Exemplo anterior com juro composto

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0(1+i_{A_1}).(1+i_{A_2}).(1+i_{A_3}).(1+i_{A_4}) \\ &= 5000(1+0,1)(1+0,06)(1+0,04)(1+0,07) = 6487,62€ \end{aligned}$$

Equação

$$\begin{aligned} C_0.(1+\bar{\imath}_A)^4 &= C_0(1+i_{A_1}).(1+i_{A_2}).(1+i_{A_3}).(1+i_{A_4}) \\ (1+\bar{\imath}_A)^{1/4} &= (1+i_{A_1}).(1+i_{A_2}).(1+i_{A_3}).(1+i_{A_4}) \\ C_4 &= C_0.(1+\bar{\imath}_A)^4 \Leftrightarrow 6487,62 = 5000(1+\bar{\imath}_A)^4 \\ \bar{\imath}_A &= 0,067281 \Longrightarrow \simeq 6,73\% \end{aligned}$$

A taxa média resulta da média geométrica dos factores de capitalização anuais:

$$(1+\bar{\imath}_A) = \sqrt[4]{(1+0,1)(1+0,06)(1+0,04)(1+0,07)}$$

Taxa média de um só capital. Juro simples

Média aritmética (simples) das taxas anuais:

$$\bar{\imath} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} i_{A,k}, \quad \text{e verifica-se} \quad C_n = C_0\left(1 + \bar{\imath}_A n\right).$$

(**NB**: Média ponderada se os períodos de capitalização de cada taxa forem diferentes).

Taxa média de um só capital. Juro composto

Média geométrica das taxas anuais:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + i_{A,k}\right) = \left(1 + \bar{\imath}_A\right)^n \Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + i_{A,k}\right)\right)^{1/n} = \left(1 + \bar{\imath}_A\right)$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + i_{A,k}\right)} = \left(1 + \bar{\imath}_A\right), \quad \text{e verifica-se} \quad C_n = C_0\left(1 + \bar{\imath}\right)^n.$$

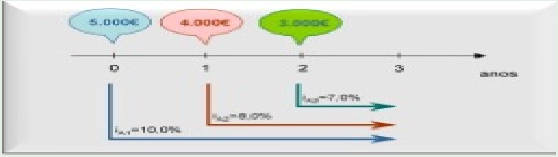
Definição (Taxa média com vários capitais)

Taxa *que aplicada a vários capitais, obtém um capital comum igual ao que seria obtido usando as diversas taxas aos respectivos capitais?*

Example (Ex. 2.9, R. Juro Simples)

A empresa $k\alpha$, Lda, pretende efectuar as aplicações nas datas e taxas abaixo. Calcule C_3.

Momento de Aplicação	Capital C_x	Prazo n_x	Taxa anual i_x
Hoje	5 000	3	10%
Daqui a 1 ano	4 000	2	8%
Daqui a 2 anos	3 000	1	7%



Example (Ex. 2.9, R. Juro Simples, Empresa *Capalfa, Lda* [cont.])

$$
\begin{aligned}
C_3 &= 5000(1+3\times 0,1)+4000(1+2\times 0,08) \\
&\quad +3000(1+1\times 0,07) \\
&= 14350
\end{aligned}
$$

Se aplicarmos todos os capitais à mesma taxa, para obter igual valor C_3:

$$
\begin{aligned}
14350€ &= 5000(1+3\bar{\imath})+4000(1+2\bar{\imath})+3000(1+1\bar{\imath}) \\
\bar{\imath} &= 9.0385\times 10^{-2} \Rightarrow 9.04\% \text{ aprox.}
\end{aligned}
$$

Fórmula geral (R.J.Simples)

$$
\sum_{k=1}^{n} C_k(1+n_k i_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k(1+n_k\bar{\imath})
$$

Example (Ex. 2.10, R. J. Composto, Empresa *Capalfa, Lda* [cont.])

$$C_3 = 5.000(1,1)^3 + 4.000(1,08)^2 + 3.000(1,07) = 14\,530,60€$$

Se aplicarmos todos os capitais à mesma taxa, para obter igual valor C_3:

$$\begin{aligned} 14\,530.60 &= 5000(1+\bar{\imath})^3 + 4000(1+\bar{\imath})^2 + 3000(1+\bar{\imath}) \\ \bar{\imath} &= 9,111\,8 \times 10^{-2} \Rightarrow 9,11\% \text{ aprox.} \end{aligned}$$

Solução: Equação do 3º grau, Função *IRR*/*TIR* da calculadora ou *Excel* (1 raiz real e duas complexas).

Fórmula geral (R.J.Composto)

$$\sum_{k=1}^{n} C_k(1+i_k)^{n_k} = \sum_{k=1}^{n} C_k(1+\bar{\imath})^{n_k}.$$

2. Equivalência de Capitais