Stochastic Calculus Exercises

João Guerra

10/02/2016

Contents

This list of exercises (and solutions) is the main exercise list for the course of Stochastic Calculus of the Master Programme in Mathematical Finance of the Lisbon School of Economics & Management, University of Lisbon, in the academic year 2015/2016

Chapter 1

Exercises

Exercício 1.1 *Show that if a process X is a Gaussian and strongly stationary process, then $\mu_X(t) = \mu_X(0)$, $\forall t \in T$ and $c_X(s,t) = f(|s-t|)$ is only a function of the distance $|s-t|$.*

Exercício 1.2 *Show that if X is a Poisson process then $X_t - X_s \sim Poi(\lambda(t-s))$ if $t > s$.*

Exercício 1.3 *Show that if X and the σ-algebra $\mathcal{B}$ are independent then $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$.*

Solution: If X and $\mathbf{1}_A$ are independent then, if $A \in \mathcal{B}$, we have that

$$E[X\mathbf{1}_A] = E[X]\,E[\mathbf{1}_A] = E[E[X]\,\mathbf{1}_A]$$

and, by definition of conditional expectation, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$.

Exercício 1.4 *Show that if Y is $\mathcal{B}$-measurable then*

$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}).$$

Solution If $Y = \mathbf{1}_A$ and $A, B \in \mathcal{B}$, then, by definition of conditional expectation,

$$\begin{aligned} E[\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B})\mathbf{1}_B] &= E[\mathbf{1}_{A\cap B}E(X|\mathcal{B})] \\ &= E[X\mathbf{1}_{A\cap B}] = E[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_A X]. \end{aligned}$$

Hence, $\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B}) = E[\mathbf{1}_A X|\mathcal{B}]$. In the same way, we get the result if $Y = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{A_j}$ (function $\mathcal{B}$-measurable). In the general case, the result is proved by approximating Y by a sequence of simple step functions which are $\mathcal{B}$-measurable.

Exercício 1.5 *Given the random variable $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, show that $E(X|\mathcal{B})$ is the orthogonal projection of X in the subspace $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ and that*

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right]$$

Solution: (1) $E(X|\mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, since it is $\mathcal{B}$-measurable and by Jensen inequality, we have that

$$E\left[|E(X|\mathcal{B})|^2\right] \leq E(|X|^2) < \infty.$$

Exemplo 1.6 *(2) If $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ then, by properties 2 and 5 of conditional expectation,*

$$\begin{aligned} E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))\, Z\right] &= E\left[XZ\right] - E\left[E(X|\mathcal{B})Z\right] \\ &= E\left[XZ\right] - E\left[E(XZ|\mathcal{B})\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

and therefore $(X - E(X|\mathcal{B}))$ is orthogonal to $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

(3) Since

$$E\left[(X-Y)^2\right] = E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] + E\left[(E(X|\mathcal{B}) - Y)^2\right]$$

we have that $E\left[(X-Y)^2\right] \geq E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right]$ and therefore

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X-Y)^2\right].$$

Exercício 1.7 *Prove properties 1,2, 4 and 6 of the conditional expectation (see the lecture notes)*

Exercício 1.8 *Show that the if process $M = \{M_n; n \geq 0\}$ is a martingale, then*

$$E\left[M_n\right] = E\left[M_0\right], \quad \forall n \geq 1.$$

Exercício 1.9 *Let $M = \{M_n; n \geq 0\}$ be a $\{\mathcal{F}_n\}$-martingale. Show that if $m \geq n$ then $E\left[M_m|\mathcal{F}_n\right] = M_n$.*

Exercício 1.10 *Show that if $B = \{B_t; t \geq 0\}$ is a Brownian motion then, for each $a > 0$, the process $\left\{a^{-1/2} B_{at}; t \geq 0\right\}$ is also a Brownian motion (this property is known as the self-similarity property).*

Exercício 1.11 *Show that if u and v are simple processes, then*

$$\int_0^T (au_t + bv_t)\, dB_t = a\int_0^T u_t dB_t + b\int_0^T v_t dB_t. \tag{1.1}$$

and

$$E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] = 0. \tag{1.2}$$

Exercício 1.12 *Show that*

$$\int_a^b u_s \mathrm{d}B_s + \int_b^c u_s \mathrm{d}B_s = \int_a^c u_s \mathrm{d}B_s.$$

Exercício 1.13 *Show, by using the definition of stochastic integral, that*

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds. \tag{1.3}$$

Hint: Note that

$$\sum_j \Delta\left(s_j B_j\right) = \sum_j s_j \Delta B_j + \sum_j B_{j+1}\Delta s_j. \tag{1.4}$$

Exercício 1.14 *Consider a deterministic function g such that $\int_0^T g(s)^2\, ds < \infty$. Show that the stochastic integral $\int_0^T g(s)\, dB_s$ is a Gaussian random variable and calculate its mean and variance*

Exercício 1.15 *Let $B_t := (B_t^1, B_t^2)$ be a bidimensional Brownian motion. Represent the process*

$$Y_t = \left(B_t^1 t, \left(B_t^2\right)^2 - B_t^1 B_t^2\right)$$

as an Itô process.

Solution: By the multidimensional Itô formula, with $f(t,x) = f(t,x_1,x_2) = (x_1 t, x_2^2 - x_1 x_2)$, we have

$$\begin{aligned} dY_t^1 &= B_t^1 dt + t dB_t^1, \\ dY_t^2 &= -B_t^2 dB_t^1 + \left(2B_t^2 - B_t^1\right) dB_t^2 + dt, \end{aligned}$$

that is,

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \int_0^t B_s^1 ds + \int_0^t s dB_s^1, \\ Y_t^1 &= -\int_0^t B_s^2 dB_s^1 + \int_0^t \left(2B_s^2 - B_s^1\right) dB_s^2 + t. \end{aligned}$$

Exercício 1.16 *Consider the following system of stochastic differential equations:*

$$dX(t) = 4e^{2t}\, dt + t\, dW(t) \text{ with } X(0) = 10.$$

$$dZ(t) = \left(t^2 + 3\sin t\right)\, dt + 4\, t\, dW(t), \text{ with } Z(0) = 5.$$

a) Write the equations in integral form.
b) Derive the solutions.

Exercício 1.17 *The Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model for the interest rate process $R(t)$ is*

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dt + \sigma\sqrt{R(t)}\, dW(t),$$

where α, β and σ are positive parameters. The CIR SDE does not have a solution in closed form. However, one can calculate the mean and the variance of $R(t)$.

a) Calculate the mean value of $R(t)$. (Hint: Let $X(t) = e^{\beta t}R(t)$. Use the function $f(t,x) = e^{\beta t}x$, apply the Itô formula on differential form and integrate).

b) Calculate the variance of $R(t)$. (Hint: Calculate $d\left(X^2(t)\right)$ by the Itô formula and integrate).

c) Calculate $\lim_{t\to+\infty} Var\,(R(t))$.

Exercício 1.18 *Show that in the numerical Millstein scheme, we have*

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)\, ds = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big[\sigma(X(t_{i-1})) + \\ + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(b\sigma' + \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2\right)(X_r)\, dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma')(X_r)\, dB_r\Big]\, dB_s.$$

Exercício 1.19 *Calculate the transition probabilities of the Ornstein-Uhlenbeck process with mean reversion.*

Solution: The SDE is

$$dX_t = a(m - X_t)\, dt + \sigma dB_t.$$

The solution in $[s, +\infty)$, with initial condition $X_s = x$, is

$$X_t^{s,x} = m + (x - m)\, e^{-a(t-s)} + \sigma e^{-at}\int_s^t e^{ar} dB_r.$$

Therefore, since $\left\{\int_s^t e^{ar} dB_r, t \geq s\right\}$ is a Gaussian process with zero mean and variance easily calculated by Ito isometry, we have that

$$\begin{aligned} E\left[X_t^{s,x}\right] &= m + (x-m)\, e^{-a(t-s)}, \\ \operatorname{Var}\left[X_t^{s,x}\right] &= \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right). \end{aligned}$$

The transition probability is

$$P(\cdot, t, x, s) = \text{Distribuição de } X_t^{s,x}.$$

Exercício 1.20 *Deduce the Black-Scholes formula for a European put option with payoff* $\Phi(S_T) = \max(K - S_T, 0)$.

Exercício 1.21 *Let* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *be a probability space where is defined a Brownian motion* B_t, $t \geq 0$, *with a filtration* $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$.

a) Show that the Brownian motion is a martingale

b) Show that the quadratic variation of the Brownian motion in the interval $[0, T]$ *is* T.

c) Show that $\int_0^T B_t\, dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T$ *(considering the definition of stochastic integral).*

d) Comment the previous result, comparing with the analogous result for classical deterministic integral calculus.

e) Show that $\int_0^t s^2\, dB_s = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s\, ds$. *(Hint: Consider* $Y_t = t^2 B_t$ *and use the Itô formula).*

h) Calculate $\mathbb{P}\left[B_{2.9} > 1.8\right]$.

Exercício 1.22 *Consider the Brownian motion* B_t, $t \geq 0$, *with the associated filtration* $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, *and let* $\alpha(t)$ *and* $\sigma(t)$ *be adapted processes. Consider the Itô process*

$$X(t) = \int_0^t \sigma(s)\, dB_s + \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds.$$

a) Write $X(t)$ *in differential form*

b) Calculate $dX(t)\, dX(t)$.

c) Derive the dynamics of the process

$$S(t) = S(0)e^{X(t)}.$$

d) Show that if $\alpha = 0$ *then* $S(t)$ *is a martingale.*

Exercício 1.23 *Let B_t, $t \geq 0$, be a Brownian motion and consider the Vasicek model for the interest rate process $r(t)$, given by the SDE*

$$dr(t) = c(\mu - r\,(t))\,dt + \sigma\,dB_t,$$

where c, μ and σ are positive parameters.

a) Write the process $r(t)$ in integral form.

b) Obtain $r(t)$ by solving the given SDE (Hint: Apply the Itô formula to $f(t,x) = e^{ct}x$).

c) Calculate the mean value and the variance of $r(t)$.

Exercício 1.24 *Let B_t, $t \geq 0$, ebe a Brownian motion and c and σ be positive parameters. Consider the following SDE's:*

$$dX(t) = c\,X(t)\,dt + \sigma\,X(t)\,dB_t.$$
$$dY(t) = c\,Y(t)\,dt + \sigma\,dB_t.$$

a) Write the equations in integral form

b) Derive the solutions of the equations.

Exercício 1.25 *Consider the Black-Scholes model with a risky asset S_t and a riskless asset (example: riskless Bank account) B_t. The assets prices S_t and B_t have dynamics given, respectively, by EDE's*

$$dS_t = \mu\,S_t\,dt + \sigma\,S_t\,dW_t \quad \text{and} \quad dB_t = r\,B_t\,dt, \text{ with } B_0 = 1.$$

Let $\Phi = (a_t, b_t)$ be a self-financed portfolio, with value V_t given by $V_t = a_t S_t + b_t B_t$, with dynamics

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dB_t,$$

and such that it replicates the European call option $C(S_t,t)$, i.e., $V_t = C(S_t,t)$.

a) Using the Itô formula, show that

$$dC(S_t,t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t) + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)S_t\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2\right)dt + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)\sigma S_t dW_t.$$

b) If the portfolio is self-financed and replicates $C(S_t,t)$, show that

$$dC(S_t,t) = (b_t r B_t + a_t S_t \mu)dt + a_t S_t \sigma dW_t.$$

c) If we consider $a_t = \frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t)$ and $b_t = \frac{C(S_t,t) - S_t\frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)}{B_t}$, the show that $C(S_t,t)$ is a solution of the Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S_t,t) + \frac{\partial C}{\partial S}(S_t,t)S_t r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_t,t)\sigma^2 S_t^2 = rC(S_t,t).$$

Chapter 2

Problemas de exame - A

Exercício 2.1 *Considere um movimento Browniano* $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$*. Mostre que o processo* Y *definido por* $Y_t = \exp(t/2)\sin(B_t)$ *é uma martingala relativamente à filtração gerada pelo movimento Browniano.*

Exercício 2.2 *Seja* $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ *um movimento Browniano.*

(a) Determine explicitamente o processo $u = \{u_t, t \in [0, T]\}$ *tal que*

$$B_T^3 = \int_0^T u_s dB_s.$$

(Sugestão: vai necessitar de calcular $\int_0^T B_t dt$*. Pode usar a fórmula de Itô para mostrar que* $\int_0^T B_t dt = \int_0^T (T-t) dB_t$*)*

(b) Considere um processo estocástico X *que satisfaz a EDE*

$$X_t = 1 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s,$$

onde μ *e* σ *são constantes. Considere ainda o processo* Y *definido por* $Y_t = X_t^\beta$*, com* $\beta \geq 2$*. Determine a equação diferencial estocástica satisfeita pelo processo* Y*.*

Exercício 2.3 *Sejam* a *e* b *constantes positivas e considere a EDE*

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{b - Y_t}{T - t} dt + dB_t, \quad 0 \leq t < T, \\ Y_0 &= a. \end{aligned}$$

(a) Verifique que

$$Y_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{dB_s}{T-s}, \qquad 0 \leq t < T$$

é solução da EDE.

(b) Determine o valor esperado e a variância de Y_t com $0 \leq t < T$.

Exercício 2.4 *Considere a EDE*

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t, X_t)\, dt + c(t)\, X_t dB_t, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

(a) Quais as condições que a função f deve satisfazer para garantir a existência e unicidade de solução para a EDE? Justifique e dê um exemplo de uma função f dependente de t e de x que satisfaça essas condições.

(b) Supondo que $f(t,x) = tx$ e que $c(t) = e^{-t}$, determine explicitamente o processo X que satisfaz a EDE. (Sugestão: pode considerar o factor integrante $F_t = \exp\left(\int_0^t c(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\, ds\right)$ e supor que $X_t = F_t Y_t$, onde Y_t satisfaz a EDO $\frac{dY_t}{dt} = tY_t$).

Exercício 2.5 *Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (exemplo conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's*

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t \quad \text{e} \quad dB_t = r\, B_t\, dt, \ \text{com } B_0 = 1,$$

onde W é um movimento Browniano. Considere um direito contingente (derivado) da forma $\chi = \Phi(S_T) = \ln(S_T)$.

(a) Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelos processos S_t e $Y_t := \ln(S_t)$, sob a medida Q (medida de martingala).

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\chi = \Phi(S_T) = \ln(S_T)$.

Exercício 2.6 *Seja F uma solução limitada e de classe $C^{1,2}$ da EDP*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) + \frac{x^2}{2} F(t,x), \\ F(0,x) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

onde φ é uma função limitada. Prove que a solução pode ser representada por

$$F(t,x) = E_{0,x}\left[\varphi(B_t) \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right)\right],$$

onde $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$ é um movimento Browniano com valor inicial em x (i.e., $B_0 = x$).

(Nota: Se não conseguir provar este resultado, pode usar uma fórmula de Feynman-Kac adequada a este problema para obter a representação estocástica para a solução).

Chapter 3

Soluções A

1. i) Para cada t fixo, o processo Y_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável pois é uma função de t e de B_t, e B_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável.Logo Y_t é adaptado.

ii) $E\left[|Y_t|\right] \leq e^{\frac{t}{2}} E\left[|\sin(B_t)|\right] \leq e^{\frac{T}{2}} < \infty$

iii) Seja $Y_t = f(t, B_t)$ com $f(t,x) = e^{\frac{t}{2}} \sin(x)$. Esta função é de classe $C^{1,2}$. Então, pela fórmula de Itô, temos:

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\, dt + e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)\, dt \\ &= e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Logo, como $Y_0 = 0$, temos

$$Y_t = \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\, dB_s.$$

Como $e^{\frac{s}{2}} \cos(B_t) \in L^2_{a,T}$ pois o processo Y_t é adaptado e $E\left[\int_0^T \left(e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\right)^2 ds\right] \leq E\left[\int_0^T e^s \cos^2(B_s)\, ds\right] \leq Te^T < \infty$, o integral estocástico indefinido $Y_t = \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s)\, dB_s$.é uma martingala (propriedade essencial do integral estocástico indefefinido).

2. (a). Seja $Y_t = f(B_t) = B_t^3$. É claro que $f(x) = x^3$. Aplicando a fórmula de Itô (note-se que f é claramente de classe C^2), temos

$$dY_t = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt.$$

Portanto

$$Y_T = B_T^3 = 3\int_0^T B_t^2 dB_t + 3\int_0^T B_t dt.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $Z_t = tB_t$, ou seja, $Z_t = g(t, B_t)$ com $g(t, x) = tx$, temos:

$$dZ_t = B_t dt + t dB_t,$$

ou seja

$$Z_t - Z_0 = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s$$

Como $Z_0 = 0$, temos

$$Z_T = TB_T = \int_0^T B_s ds + \int_0^T s dB_s$$

e

$$\int_0^T B_s ds = TB_T - \int_0^T s dB_s$$

Logo

$$\begin{aligned} B_T^3 &= 3\int_0^T B_t^2 dB_t + 3TB_T - 3\int_0^T t dB_t \\ &= \int_0^T 3B_t^2 dB_t + \int_0^T 3T dBt - \int_0^T 3t dB_t \\ &= \int_0^T 3(B_t^2 + T - t) dB_t. \end{aligned}$$

e portanto $u_t = 3(B_t^2 + T - t)$.

2 (b) $Y_t = f(X_t)$ com $f(x) = x^\beta$, que é claramente de classe C^2. Pela fórmula de Itô temos

$$\begin{aligned} dY_t &= \beta X_t^{\beta-1} (dX_t) + \beta(\beta - 1) X_t^{\beta-2} (dX_t)^2 \\ &= \beta X_t^{\beta-1} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) + \beta(\beta - 1) X_t^{\beta-2} \sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \left(\beta\mu + \beta(\beta - 1)\sigma^2\right) Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t. \end{aligned}$$

Pelo que a EDE é

$$dY_t = \left(\beta\mu + \beta(\beta - 1)\sigma^2\right) Y_t dt + \beta\sigma Y_t dB_t.$$

3. (a) Podemos representar $Y_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T - t) X_t$, onde $X_t = \int_0^t \frac{1}{T-s} dB_s$. Ou seja, $Y_t = f(t, X_t)$ com $f(t, x) = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + b\frac{t}{T} + (T - t) x$.

É óbvio que f é de classe $C^{1,2}$ e pela fórmula de Itô, como $dX_t = \frac{1}{T-t}dB_t$, temos:

$$\begin{aligned}
dY_t &= \left(-\frac{a}{T}+\frac{b}{T}-X_t\right)dt+(T-t)\,dX_t \\
&= \frac{1}{T-t}\left(b-\left(a\left(1-\frac{t}{T}\right)+b\frac{t}{T}+(T-t)\,X_t\right)\right)dt+\frac{T-t}{T-t}dB_t \\
&= \frac{b-Y_t}{T-t}dt+dB_t.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{b-Y_t}{T-t}dt+dB_t, \\
Y_0 &= a.
\end{aligned}$$

3 (b) Como $\frac{1}{T-s} \in L^2_{a,T}$, o integral estocástico $X_t = \int_0^t \frac{1}{T-s}dB_s$ está bem definido e o seu valor esperado é zero. Logo

$$E\left[Y_t\right] = a\left(1-\frac{t}{T}\right)+b\frac{t}{T}.$$

E, pela isometria de Itô temos

$$\begin{aligned}
Var\left[Y_t\right] &= E\left[Y_t^2\right]-\left(E\left[Y_t\right]\right)^2 \\
&= (T-t)^2\,E\left[\left(\int_0^t \frac{1}{T-s}dB_s\right)^2\right] \\
&= (T-t)^2\int_0^t\left(\frac{1}{T-s}\right)^2 ds \\
&= (T-t)^2\left(\frac{1}{T-t}-\frac{1}{T}\right).
\end{aligned}$$

4 (a) Se $f(t,x)$ for uma função contínua em x que satisfaz a condição de Lipschitz e a condição de crescimento linear, podemos aplicar o teorema de existência e unicidade e garantir que existe uma solução única para a EDE (isto poque a função $\sigma(t,x) = c(t)x$ satisfaz a condição de Lipschitz e é linear em x).

Condição de Lipschitz: Existe constante D tal que

$$\left|f(t,x)-f(t,y)\right| \leq D\left|x-y\right|, \ \forall x,y \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [0,T].$$

Condição de crescimento linear: Existe constante C tal que

$$|f(t,x)| \leq C(1+|x|), \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T].$$

Exemplo de função que satisfaz estas condições:

$$f(t,x) = tx.$$

(b) Como $\frac{dY_t}{dt} = tY_t$ é uma EDO separável, a sua solução é

$$\frac{dY_t}{Y_t} = tdt \Longrightarrow \ln(Y_t) = \frac{t^2}{2} \Longrightarrow Y_t = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Logo

$$X_t = F_t Y_t = \exp\left(\int_0^t c(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\, ds + \frac{t^2}{2}\right) = \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\, ds + \frac{t^2}{2}\right),$$

onde $Z_t := \int_0^t c(s)\, dB_s$. Pelo que $X_t = g(t, Z_t)$ com $g(t,x) = \exp\left(x - \frac{1}{2}\int_0^t [c(s)]^2\, ds + \frac{t^2}{2}\right)$. Aplicando a fórmula de Itô a X_t e $g(t,x)$, podemos verificar que

$$dX_t = f(t, X_t)\, dt + c(t)\, X_t dB_t$$

e também $X_0 = 1$.

5 (a) A EDE $dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$ é equivalente a

$$\begin{aligned} dS_t &= r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t\right) \\ &= r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t, \end{aligned}$$

onde, pelo teorema de Girsanov, $\overline{W}_t := \frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t$ é um movimento Browniano relativamente à medida de probabilidade neutra face ao risco (ou medida de martingala equivalente). Portanto a EDE ou a dinâmica de S_t sob a medida Q é

$$dS_t = r\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, d\overline{W}_t.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $X_t = \ln(S_t)$, temos:

$$dX_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma d\overline{W}_t$$

ou

$$X_t = \ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma \overline{W}_t.$$

5 (b) Pelo modelo de B-S, temos que

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}\left[\Phi(S_T)\right] \\ &= e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}\left[\ln(S_T)\right] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} dS_u &= r\, S_u\, du + \sigma\, S_u\, d\overline{W}_u, \\ S_t &= s \end{aligned}$$

Pela alínea (a), temos

$$X_T = \ln(S_T) = \ln(s) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(\overline{W}_T - \overline{W}_t\right).$$

Logo

$$E^Q_{t,s}\left[\ln(S_T)\right] = \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

e

$$F(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right].$$

6. A ideia é fazer uma prova semelhante à da demonstraçao nos slides 8-10 da aula do Cap. 6 - parte 3.

Considerem-se o sprocessos

$$\begin{aligned} Y_t &= (s-t, B_t), \\ Z_t &= \frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds. \end{aligned}$$

Aplique-se a fórmula de Itô à função $f(t, y, z) = e^z F(t, x)$. Obtemos

$$\begin{aligned} e^{Z_t} F(Y_t) = F(s, x) + & \\ & + \int_0^t \left[\left(AF - \frac{\partial F}{\partial t}\right)(s-r, B_r) + \frac{1}{2} B_r^2 F(s-r, B_r)\right] e^{Z_r} dr \\ & + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s-r, B_r)\, e^{Z_r} dB_r, \end{aligned}$$

onde A é o operador infinitesimal associado a B_t, isto é:

$$AF = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Portanto, como F satisfaz a EDP, temos:

$$\begin{aligned}
&\left(AF - \frac{\partial F}{\partial r}\right)(s-r, B_r^x) + \frac{1}{2}B_r^2 F\,(s-r, B_r) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s-r, B_r) - \frac{\partial F}{\partial t}(s-r, B_r) + \frac{1}{2}B_r^2 F\,(s-r, B_r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e então:

$$e^{Z_t} F\,(Y_t) = F\,(s,x) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s-r, B_r)\, e^{Z_r} dB_r.$$

Aplicando o valor esperado e tomando $s = t$, obtemos

$$E_{0,x}\left[e^{Z_t} F\,(Y_t)\right] = F\,(t,x)$$

ou seja:

$$\begin{aligned}
F\,(t,x) &= E_{0,x}\left[e^{Z_t} F\,(0, B_t)\right] \\
&= E_{0,x}\left[\varphi\,(B_t)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right)\right].
\end{aligned}$$

Chapter 4

Problemas de Exame - B

Exercício 4.1 *Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \geq 0\}$.*

(a) Seja Z o processo definido por

$$Z_t = B_t^4 - B_t^3 + 5B_t^2 - \alpha t - 3\int_0^t \left(2B_s^2 - B_s\right) ds,$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma constante. Determine para que valores de α, é o processo Z_t uma martingala, justificando.

(b) Considere agora que, para além de B, temos outros 3 movimentos Brownianos $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ e $W^{(3)}$, que são todos independentes entre si e independentes de B. Será que o processo estocástico

$$Y_t = \frac{B_t + W_t^{(1)} + W_t^{(2)} + W_t^{(3)}}{4}$$

é um movimento Browniano? Justifique.

Exercício 4.2 *Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$. Seja $Z_t = \exp\left(\frac{1}{2}t\right)\sin(B_t)$. Mostre que*

$$Z_t = \mathbb{E}[Z_t] + \int_0^t v_s dB_s,$$

para um certo processo v. Determine o processo v e $\mathbb{E}[Z_t]$.

Exercício 4.3 *Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \in [0,T]\}$.*

(a) Seja $Z = \{Z_t, t \in [0,T]\}$ o processo estocástico definido por

$$Z_t = \left(1 + t + t^2\right) e^{3B_t}.$$

Defina $Y = \{Y_t, t \in [0,T]\}$ *como o processo com diferencial*

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{dZ_t}{Z_t} \\ Y_0 &= 2 \end{aligned}$$

Determine explicitamente Y.

(b) Considere a E.D.E.

$$\begin{aligned} dX_t &= \left(\frac{X_t^3 - X_t^2 + X_t - 4}{1 + X_t^2} \right) dt + \frac{1}{2} \cos(X_t) \, dB_t \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

Será que existe uma solução única para esta E.D.E. (com valor inicial) ou não? Justifique convenenientemente a sua resposta.

Exercício 4.4 *Considere o problema de valores na fronteira no domínio* $[0,T] \times \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + 7x \frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{25}{2} \right) x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ F(T, x) &= x^4. \end{aligned}$$

Especifique qual o gerador infinitesimal da difusão associada, determine explicitamente este processo de difusão, a fórmula de representação estocástica para a solução do problema e determine a solução do problema (da forma mais explícita que conseguir).

Exercício 4.5 *Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco* S_t *e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária)* B_t. *Os activos* S_t *e* B_t *têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's*

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma \, S_t \, d\overline{W}_t \quad \text{e} \quad dB_t = r \, B_t \, dt, \ \text{com } B_0 = 1,$$

onde $\overline{W}$ *é um movimento Browniano.*

(a) Determine as equações diferenciais estocásticas satisfeitas pelos processos S_t *e* $Y_t := \ln\left(S_t^\beta\right)$, *com* $\beta \geq 2$, *sob a medida* Q *(medida de martingala).*

(b) Determine o preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\chi = \Phi(S_T) = \ln\left(S_T^\beta\right)$, *com* $\beta \geq 2$.

Exercício 4.6 *Seja $B = \{B_t, t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere um processo $v = \{v_t, t \in [0,T]\}$ que pertence à classe $L^2_{a,T}$. Defina a sucessão de tempos de paragem*

$$\tau_n := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t v_s^2 ds \geq n \quad ou \quad \int_0^t v_s dB_s \geq n \right\}.$$

Mostre que

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau_n \wedge T} \left| \int_0^t u_s dB_s \right|^4 \right] \leq CE\left[\left(\int_0^{\tau_n \wedge T} u_s^2 ds \right)^2 \right],$$

onde C é uma constante

Nota: use a desigualdade:

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq \tau_n \wedge T} \left| \int_0^t u_s dB_s \right|^4 \right] \leq KE\left[\left| \int_0^{\tau_n \wedge T} u_s dB_s \right|^4 \right],$$

onde K é uma constante.

Chapter 5

Problemas de Exame - C

Exercício 5.1 *Considere o movimento Browniano* $B = \{B_t, t \geq 0\}$.

(a) Verifique se o processo X *definido por*

$$X_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + t^2$$

é ou não uma martingala, justificando.

(b) Será que o processo Y *definido por*

$$Y_t = tB_{\frac{1}{t}}$$

é um movimento Browniano? Justifique convenientemente.

Exercício 5.2 *Seja* $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ *um movimento Browniano. Mostre que*

$$\exp(B_T) = e^{\frac{T}{2}} + e^{\frac{T}{2}} \int_0^T e^{\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} dB_s$$

e calcule $\operatorname{Var}\left[e^{\frac{T}{2}} \int_0^T e^{\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} dB_s\right]$. *(Sugestão: considere o processo* $Y_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$*).*

Exercício 5.3 *Considere o movimento Browniano* $B = \{B(t), t \in [0, T]\}$

(a) Resolva a E.D.E.

$$dX_t = e^{-2t} X_t dt + t^2 X_t dB_t,$$
$$X_0 = \sqrt{2}.$$

Sugestão: talvez seja conveniente usar um factor de integração adequado.

(b) Considere a E.D.E.

$$dX_t = \sqrt{X_t} dt + X_t dB_t, \qquad X(0) = 0.$$

Verifique se pode aplicar o teorema de existência e unicidade de soluções. Justifique.

Considerando também a E.D.E.

$$dX_t = X_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \qquad X(0) = 0,$$

o que pode concluir sobre a existência e unicidade de solução neste caso? Justifique.

Exercício 5.4 *Considere o problema de valores na fronteira no domínio* $[0, T] \times \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 4F(t, x) - 50 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ F(T, x) &= x^2. \end{aligned}$$

Especifique qual o operador infinitesimal da difusão associada, determine explicitamente este processo de difusão e determine a solução explícita do problema.

Exercício 5.5 *Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco* S_t *e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária)* B_t*. Os activos* S_t *e* B_t *têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's*

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma \, S_t \, d\overline{W}_t \quad \text{ e } \quad dB_t = r \, B_t \, dt, \ \text{com } B_0 = 1,$$

onde $\overline{W}$ *é um movimento Browniano e* $t \in [0, T]$*.*

(a) Considere uma carteira autofinanciada com composição $(h^0(t), h^*(t))$ *(de activos sem risco e com risco, respectivamente) e seja* V_t *o valor dessa carteira no instante* t*. Supondo que esta carteira replica um derivado cujo preço é dado pela função de classe* $F(t, S_t)$ *(i.e.,* $F(t, S_t) = V_t$*) deduza que:*

$$h^*(t) = \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial x}.$$

(Sugestão: aplique a Fórmula de Itô a $F(t, S_t)$ *e determine depois o diferencial* dV_t*, tendo em conta que a carteira é autofinanciada).*

(b) Determine o preço (no instante $t < T$*) do direito contingente com payoff*

$$\chi = \Phi(S_T) = \begin{cases} 2K & se \ \ln(S_T) > 2K \\ K & se \ K \le \ln(S_T) \le 2K \\ 0 & se \ \ln(S_T) < K \end{cases}$$

Exercício 5.6 *Seja* $B = \{B_t, t \geq 0\}$ *um movimento Browniano. Considere* $\varepsilon > 0$ *e a função*

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & se\ |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & se\ |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $g_\varepsilon(B_t)$ *(apesar de não ter 2ª derivada em* $x = \pm\varepsilon$*), mostre que*

$$g_\varepsilon(B_t) = \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^t g'_\varepsilon(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbf{1}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(B_s)\, ds,$$

e mostre ainda que quando $\varepsilon \to 0$ *(limite em média quadrática), obtemos que*

$$\int_0^t g'_\varepsilon(B_s)\, dB_s \to \int_0^t \mathrm{sign}(B_s) dB_s.$$