



LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

## Cap. 3 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão (Optativa)

2019

M Cândida Mourão  
cmourao@iseg.ulisboa.pt

2018/19




## Análise de Decisão

- Análise de Decisão
  - Modelação
  - Critérios de Decisão
    - Não Probabilísticos
    - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*
- Decisão Com Incorporação de Experiência

2018/19

M Cândida Mourão


2



## Análise de Decisão - Modelação

- 1) **Ações:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$** 
  - Identificar e enumerar TODAS as Ações de forma
    - EXAUSTIVA – não ignorar ações
    - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
  - **Objetivo** – escolher uma e uma só ação de  $A$
- 2) **Estados da Natureza:  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$** 
  - Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
    - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
    - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
  - Ocorre um e um só estado!
  - O decisor só conhece o estado depois de escolhida a ação

2018/19
M. Cândida Mourão
3



## Análise de Decisão - Exemplo

**Exemplo Protótipo** - (H&L, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.

2018/19
M. Cândida Mourão
4



## LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT UNIVERSIDADE DE LISBOA

# Decisão Sem Experiência - Exemplo

➤ Identificar a matriz de ganhos para o exemplo protótipo

**Ações:**  
 $a_1$  – manter o terreno e explorar  
 $a_2$  – vender o terreno

**Estados da natureza:**  
 $\theta_1$  – existe petróleo  
 $\theta_2$  – não existe petróleo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$
$a_1$	700	-100
$a_2$	90	90

2018/19M. Cândida Mourão7

## LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT UNIVERSIDADE DE LISBOA

# Análise de Decisão

**Problemas a responder**


- Que ação escolher?
- Qual o ganho esperado da ação escolhida?
- Valerá a pena efetuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza?

Será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma?

Qual o Preço de reduzir a incerteza?

- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para eliminar a incerteza?

2018/19M. Cândida Mourão8



## Decisão Sem Experiência


### Critério de Decisão Não Probabilístico

Princípio de Decisão **MAXIMIN** (Wald, 1945)


- Critério pessimista ➡ a natureza “é do contra”! O estado de natureza será o pior possível para a ação que o decisor escolher.
- Cada Ação ➡ o ganho mínimo  
natureza é adversa

Ação **maximin** ➡ maximiza o ganho mínimo

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq k \leq n} \{p(a_i, \theta_k)\} \right\}$$



2018/19
M. Cândida Mourão
9




## Decisão Sem Experiência - Exemplo

- Ação MaxiMim para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	min
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	

**R:** a ação maximin é !

2018/19
M. Cândida Mourão
10



## Decisão Sem Experiência - Exemplo


➤ Ação MaxiMim para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	min
$a_1$	700	-100	-100
$a_2$	90	90	90

← máx

**R:** a ação maximin é  $\tilde{a} = a_2!$

2018/19
M. Cândida Mourão
11



## Decisão Sem Experiência

### Princípio de Decisão **MAXIMIN**


#### Vantagens

- Protege o decisor contra o “pior caso”
- Garante um ganho mínimo
- Não permite perdas disparatadas

#### Adapta-se a situações de

- Forte aversão ao risco
- Concorrência agressiva

2018/19
M. Cândida Mourão
12




## Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	
$a_1$	-80	-90	-50	
$a_2$	2200	3000	-100	

**R:**

2018/19
M Cândida Mourão
13




## Decisão Sem Experiência - Exemplo

Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	
$a_1$	-80	-90	-50	
$a_2$	2200	3000	-100	

**R:** ação maximin é  $\tilde{a} = a_1$ !

2018/19
M Cândida Mourão
14



## Decisão Sem Experiência

**Critério de Decisão Probabilístico**

**Princípio de Decisão Bayes**


Informação do decisor sobre os estados da natureza (v.a.) traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori*

$$h_{\theta}(k) = P[\theta = \theta_k] \quad \text{probabilidade } a \text{ priori do estado } \theta_k$$

**Princípio de Bayes** - ação que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a ação correspondente a:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_{\theta}(k) p(a_i, \theta_k) \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{E[p(a_i, \theta)]\}$$

2018/19
M. Cândida Mourão
15



## Decisão Sem Experiência

➤ Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo


$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_{\theta}(k)$			

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

2018/19
M. Cândida Mourão
16






## Decisão Sem Experiência

➤ Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_0(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1


$$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times (-100) = 100$$

$$E[p(a_2, \theta)] = 90$$



$a_h = a_1!$

2018/19
M Cândida Mourão
17



## Árvores de Decisão

Especialmente úteis quando:


- 1) Existem ações sequenciais no tempo (Experiências, ...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

**Árvore de Decisão** - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** - a escolha do caminho a seguir é do decisor
- Nodos Causais** (ou aleatórios) - a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

*Excel / TreePlan*

2018/19
M Cândida Mourão
18



## Decisão Com Experiência

- Valerá a pena recorrer a experimentação para diminuir a incerteza?
- O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** = valor que o decisor paga para retirar a incerteza, para ter a certeza de qual dos estados se irá observar!
- $a_h$  = ação Bayes (sem experiência), com ganho esperado  $E[p(a_h, \theta)]$


$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$

com  $EP$  = ganho esperado com informação perfeita (IP), logo:

$$EP = \sum_{k=1}^n h_{\theta}(k) p(\tilde{a}^k, \theta_k)$$

e  $\tilde{a}^k$  é a ação a escolher se o estado da natureza é  $\theta_k$  (melhor ação para  $\theta = \theta_k$ )

2018/19
M Cândida Mourão
19



## Valor Esperado da Informação Perfeita

### Exemplo Protótipo

- Valor esperado da Informação Perfeita - **EVPI**


$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_0(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Valor a pagar para **eliminar** a incerteza!

- Se souber que  $\theta = \theta_1$  escolho  com ganho
- Se souber que  $\theta = \theta_2$  escolho  com ganho

$EVPI =$

2018/19
M Cândida Mourão
20



## Valor Esperado da Informação Perfeita

➤ Valor esperado da Informação Perfeita - *EVPI*

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_0(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Valor a pagar para **eliminar** a incerteza!


➤ Se souber que  $\theta = \theta_1$  escolho  $a_1$  com ganho 700

➤ Se souber que  $\theta = \theta_2$  escolho  $a_2$  com ganho 90

$$\Rightarrow EP = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times 90 = 242,5$$

$$EVPI = 242,5 - 100 = 142,5$$

2018/19
M. Cândida Mourão
21



## Decisão Com Experiência


➤ Se realizar uma experiência (diminuir a incerteza) a ação a escolher deve depender do resultado da experiência. O decisor deve ter uma **função de decisão** que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência

➤ **Questões:**

- Deve ou não ser feita a experiência?
- Se optar pela experiência que ação escolher, em função do resultado da experiência?

➤ Optando pela **função de decisão Bayes**, a ação é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado para as probabilidades revistas (**a posteriori**), tendo em conta cada um dos possíveis resultados da experiência e as probabilidades destes resultados!


2018/19
M. Cândida Mourão
22



## Decisão Com Experiência


Seja:

- $S$  v.a. : informação adicional da experiência
- $h_{\theta}(k)$  : probabilidades *a priori*
- $Q_{S|\theta=\theta_k}(s) = P(S = s|\theta = \theta_k)$  : **função de verosimilhança** da experiência
 



credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P(S = s|\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$  é a f.d. conjunta do par aleatório  $(\theta, S)$
- $P(S = s) = \sum_{k=1}^n P(S = s|\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$  é a f.d. marginal da v.a.  $S$


2018/19
M Cândida Mourão
23



## Decisão Com Experiência

- **Método:**
  - 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P(\theta = \theta_k | S = s) = \frac{P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)}{\sum_{k=1}^n [P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)]}$$



    - As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.
  - 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a ação Bayes
  - 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de  $S$  e as ações Bayes para cada resultado possível.
- **Árvores de Decisão** - alternativa!

2018/19
M Cândida Mourão
24

## Decisão Com Experiência - Exemplo



### Exemplo Protótipo (continuação – H&L pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de 30 000 *u.m.*.

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: **FSS** (é provável a existência de petróleo) ou **USS** (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

- a) Valerá a pena efectuar um teste sísmico?
- b) Qual a ação que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?
- c) Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?