LISBOA SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT	**Estatística II** Licenciatura em Gestão	2º Semestre – 2018/2019 Teste Intercalar Duração: 1 Hora

Nome: ____________________________ Nº______________

Espaço reservado a classificações

1.a)	1.b)	2.a)	2.b)
3)	4.a)	4.b)	

1. O gerente de uma empresa pretende avaliar a variação da temperatura, em graus, de um novo forno eléctrico produzido. Sabe-se que as temperaturas são bem modeladas por uma distribuição normal. Recolhida uma amostra aleatória de 30 fornos para teste, obteve-se um desvio padrão corrigido amostral de $s' = 9.81$.

   a) Construa um intervalo de confiança a 95% para a variância da temperatura populacional e interprete-o. *[2.0]*

IC a 95% para σ^2:

$$\textbf{VF}:\ Q = \frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \rightarrow \chi^2(29)$$

$$\textbf{IC}:\ \left(\frac{(n-1)s'^2}{q_{0.025}}, \frac{(n-1)s'^2}{q_{0.975}}\right) = \left(\frac{29 \times 9.81^2}{45.722}, \frac{29 \times 9.81^2}{16.047}\right) = (61.04, 173.92)$$

Com uma confiança de 95% pode afirmar-se que a variância da temperatura deste novo forno se situa entre 61.04 e 173.92.

   b) Se o gerente quisesse que o intervalo anterior tivesse uma amplitude mais baixa, mantendo a dimensão da amostra, qual das seguintes possibilidades acha válida como solução?
   [Resposta certa: 1.0 / Resposta errada: -0.25]

Reduzir o grau de confiança.	**X**
Aumentar o grau de confiança.	
É estritamente necessário alterar a dimensão da amostra para diminuir a amplitude.	

2. Assuma que o número de queixas por dia de clientes numa loja de uma empresa de telecomunicações segue uma distribuição de Poisson com média λ desconhecida. Escolhidos 50 dias ao acaso, registou-se um total de 160 queixas nessa loja.

   a) Usando a distribuição por amostragem:

$$Z = \frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

   teste a hipótese de o número médio de queixas por dia nessa loja não ultrapassar 3 contra a alternativa de ser superior a 3. O que pode concluir com um nível de 5%? *[2.0]*

$$H_0: \lambda \leq 3 \quad \text{vs} \quad H_1: \lambda > 3$$

$$\textbf{ET}: Z = \frac{\bar{X} - 3}{\sqrt{3/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$W_{0.05} = \{z_{obs}: z_{obs} > 1.645\}$$

$$z_{obs} = \frac{(160/50) - 3}{\sqrt{3/50}} \approx 0.8165$$

   Porque $z_{obs} \notin W_{0.05}$, não se rejeita H_0 ao nível de 5%. A evidência estatística é favorável à hipótese de o número médio de queixas por dia nesta loja não ser maior que 3.

   b) Não rejeitando a hipótese nula do teste anterior, poderemos estar a cometer algum tipo de erro?
   [Resposta certa: 1.0 / Resposta errada: -0.25]

Sim, o de 1ª espécie.	
Sim, o de 2ª espécie.	**X**
Não, porque a amostra é grande.	

3. Complete as seguintes definições:

   a) Um estimador T para um parâmetro desconhecido θ é centrado se e só se… *[0.5]*

$$E(T) = \theta\ , \quad \forall \theta \in \Theta$$

   b) O teste mais potente envolvendo hipóteses simples é aquele em que… *[0.5]*

   … fixada a probabilidade do erro de primeira espécie, se maximiza a potência (ou se minimiza a probabilidade do erro de 2ª espécie).

4. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade $f(x|\theta)$, onde $0 < \theta < 1$. Assumindo uma amostra casual de dimensão n, a aplicação do método da máxima verosimilhança conduziu ao seguinte estimador para θ:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$$

onde $|X_i|$ é o módulo da observação X_i.

a) Sabendo que $|X| \sim B(1, \theta)$, mostre que o estimador da máxima verosimilhança para θ é consistente. *[2.0]*

Sabe-se que: $|X| \sim B(1, \theta)$, pelo que $E(|X_i|) = \theta$ e $Var(|X_i|) = \theta(1-\theta)$.

Assim,

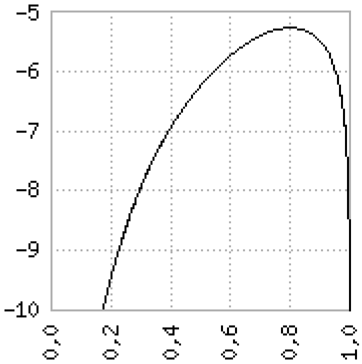
$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(|X_i|)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\theta\right) = \lim_{n\to\infty}\theta = \theta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|X_i|}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n} Var(|X_i|)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta(1-\theta)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cdot n\theta(1-\theta)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\theta(1-\theta)}{n}\right] = 0$$

Porque $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ e $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$, conclui-se que o estimador da máxima verosimilhança para θ é consistente.

b) Para uma amostra particular, o gráfico da função logaritmo da verosimilhança foi o seguinte:



Qual lhe parece ser o valor mais plausível para a estimativa de θ?

[Resposta certa: 1.0 / Resposta errada: -0.25]

-5.25	
0.8	**X**
1	