INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

Sejam $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas absolutamente convergentes.

a) (2,0) Mostre que, para todo $x \in \Re$, a série $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)\right)$ é convergente.

b) (1,0) Sendo a função $f : \Re \to \Re$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n sen(nx)\right),$$

mostre que f é periódica.

II

Seja $n \in N$, considere o subconjunto de $\Re^n$

$$A = \left\{x \in \Re^n : \|x\| = 1\right\}.$$

a) (1,5) Determine o interior, o exterior e a fronteira de *A*. Justifique se *A* pode ser um conjunto compacto.

b) (2,5) Seja $M \subset \Re^n$, e considere as funções $f : M \to A$ e $g : A \to \Re$, a primeira sobrejectiva e a última contínua. Prove que a função $g \circ f$ tem máximo e mínimo.

III

Considere a função $f : \Re^2 \to \Re$ definida pela expressão

$$f(x,y) = \begin{cases} xy + k & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} & x = 0 \end{cases}.$$

a) (1,5) Estude a existência da derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,y)$, segundo um vector genérico não nulo $u \in \Re^2$, em função do valor real k.

b) (1,5) Faça $k = 0$. O que pode afirmar sobre a diferenciabilidade de f nos pontos $(0,y)$, apenas com base no resultado obtido na alínea anterior?

c) (1,5) Faça $k = 1$. Estude a diferenciabilidade de f nos pontos $(0,y)$.

IV

(2,5) Considere a função $f(x,y,z) = yze^x$ e seja $g : \Re^2 \to \Re^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = (0,1,2)$ e $D_g(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada direccional $D_v(f \circ g)(0,0)$ onde $v = (1,2)$, justificando convenientemente.

V

a) (1,5) Estude a existência de extremantes para a função $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + 2x + \log y$.

b) (2,0) Mostre, por definição, que $(-1,1)$ é um ponto de sela da função.

VI

(2,5) Considere a função complexa de variável complexa $f = u + iv$ com $v(x,y) = x^n + y^n$, e $n \in N$. Calcule os valores naturais de n, para os quais a função é holomorfa e determine-a. Calcule f' para os valores encontrados.

fim