

**ANÁLISE MATEMÁTICA II**  
**Tópicos de Resolução EN 4/6/2015**

**I**

- a) Seja  $c_n = |a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)| \leq |a_n| + |b_n| = v_n \quad \forall x \in \mathfrak{R}$ . Pelo Critério Geral da Comparação, se  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  é convergente então  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  é convergente, ou seja a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$  é convergente por ser absolutamente convergente. A série  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  é convergente pois o seu termo geral é soma dos termos gerais de duas séries convergentes, por hipótese.
- b)  $f(x) = f(x + 2\pi)$ , o que prova ser uma função periódica.

**II**

$$A = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 1 \right\}.$$

- a)  $\operatorname{int} A = \{ \}$ ,  $\operatorname{ext} A = \mathfrak{R}^n \setminus A$ ,  $\operatorname{fr} A = A$ .  $A$  é um conjunto fechado porque é igual à sua aderência e também é limitado porque está contido nalguma bola, por exemplo  $A \subset B_\varepsilon((0,0,\dots,0)) \quad \forall \varepsilon > 1$ , assim  $A$  é um conjunto compacto.
- b)  $f(M) = A$  porque  $f$  é sobrejectiva e  $(g \circ f)(M) = g(A)$ . Como  $g$  é contínua e  $A$  é compacto então, pelo Teorema de Weierstrass, a função  $g \circ f$  tem máximo e mínimo.

**III**

- a)  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } u_1 = 0 \wedge k \in \mathfrak{R} \\ u_1 \mathbf{y} & \text{se } u_1 \neq 0 \wedge k = 1 \end{cases}$ . A existência da derivada direccional  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, y)$ , é

independente do valor real  $k$  se  $u_1 = 0$ , caso contrário só existe se  $k = 1$ .

- b) Para  $k = 0$ ,  $f$  não é diferenciável nos pontos  $(0, y)$  pois não existe a derivada parcial em ordem a  $x$ .

c) A função é diferenciável nos pontos  $(0, y)$  pois

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, y+h_2) - 1 - yh_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \begin{cases} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{1-1}{\sqrt{h_2^2}} = \mathbf{0} \text{ se } h_1 = 0 \\ \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \mathbf{0} \text{ se } h_1 \neq 0 \end{cases}$$

#### IV

$D_v(f \circ g)(0,0) = \nabla(f \circ g)(0,0) \cdot v$  porque  $(f \circ g)$  é diferenciável no ponto  $(0,0)$  pois a função  $f$  é diferenciável em  $\mathfrak{R}^3$  logo é diferenciável em  $g(0,0) = (0,1,2)$ .

$$D(f \circ g)(0,0) = J_f(g(0,0)) \times J_g(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix}, \text{ assim a derivada}$$

$$\text{direccional } D_v(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 34.$$

#### V

$$\text{a) } \nabla f(x, y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{y} + 2 = 0 \\ -\frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ pois } y > 0. H_f(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ que é}$$

uma forma quadrática indefinida donde  $(-1,1)$  é um ponto de sela, e assim se conclui que não existem extremantes para a função.

b) Por definição,  $(-1,1)$  é um ponto de sela da função se é ponto crítico, o que já foi provado na alínea anterior, e se  $\forall \varepsilon > 0 \exists a, b \in B_\varepsilon((-1,1)) f(a) < f(-1,1) < f(b)$ . Como

$$f(-1,1) = -1, \text{ sejam então } f(b) = f(-1+h,1) = h^2 - 1 > -1 \text{ para } h \neq 0 \wedge |h| < \varepsilon \text{ e}$$

$$f(a) = f(-1-h,1+h) = -(1+h) + \log(1+h) < -1 \text{ para } h \neq 0 \wedge |h| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

## VI

Para  $f$  ser holomorfa é necessário que se verifiquem as equações de Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = ny^{n-1} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -nx^{n-1} \end{cases} . \text{ Partindo da primeira equação, obtem-se } \varphi'(y) = -nx^{n-1} - n(n-1)y^{n-2}x ,$$

donde se conclui que deverá ser  $n = 1$  pois  $\varphi'(y)$  é função arbitrária apenas de  $y$ . Deste modo, a função holomorfa  $f(x+iy) = (x-y+C)+i(x+y)$  com  $C \in \mathfrak{R}$ , e

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + i .$$

**fim**