



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II - Licenciatura MAEG

Época Normal – 3 de Junho de 2016 Duração: 2 horas

I

(2,5) Desenvolva em série de potências de $x+1$ a função $f(x) = \frac{2}{x-1}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

II

Considere a função $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\log\|(x, y)\|}{\sqrt{1-\|(x, y)\|}}.$$

- (1,0) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.
- (1,0) Determine analiticamente os conjuntos $\text{int}(D_f)$ e $\text{fr}(D_f)$.
- (1,5) Indique o valor lógico da proposição $\forall_{(x,y) \in D_f} \exists_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon((x, y)) \subset D_f$, justificando convenientemente. Diga qual o seu significado.

III

Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} xy & \text{se } y \neq x \\ x + y & \text{se } y = x \end{cases}.$$

- (1,0) Determine o valor de $\nabla f(0,0)$.
- (1,5) Mostre que a função admite derivada no ponto $(0,0)$ segundo qualquer direcção e indique esse valor.
- (2,0) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

IV

Atenda à seguinte

Definição: Uma função $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ diz-se *homogénea de grau* $\alpha \in \mathbb{Q}$ se

verifica a igualdade $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Considere a função $f : D_f \subset \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f(x, y) = e^{x/y} - g\left(\frac{y-x}{x}\right)$ onde

$g : D_g \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função de classe C^1 .

a) (1,0) Mostre que a função f é homogénea e indique o seu grau de homogeneidade.

b) (1,5) Mostre que a função f verifica a seguinte igualdade conhecida por *identidade de Euler*,

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \alpha f,$$

sendo α o grau de homogeneidade de f .

c) (1,5) Supondo $g'(0) = 1$, mostre que a derivada de f no ponto $(1,1)$ segundo qualquer direcção definida por $y = x$ é 0.

V

(2,5) Considere a função $f(x, y, z) = x \cos(y) + e^{z^2}$. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

VI

Considere a função complexa de variável complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, holomorfa nalgum aberto de C .

a) (1,0) Para que valores do parâmetro real a , a função $u(x, y) = x^3 + y^3 + axy(x + y)$ é harmónica?

b) (2,0) Faça $a = -3$. Determine a função harmónica conjugada v , tal que $v(0,0) = 0$, e calcule $f'(-i)$.

fim