

**SOLUÇÕES**  
**ANÁLISE MATEMÁTICA II**  
 Licenciatura MAEG  
**Época Normal** – 7 de Junho de 2017

**I**

$e^{3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^3 3^n}{n!} (x-1)^n$ ,  $\forall x \in \mathfrak{R}$ . Pelo Teorema de Taylor tem-se

$$a_n = \frac{e^3 3^n}{n!} = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}, \text{ assim } f^{(iv)}(1) = e^3 3^4 = 81e^3.$$

**II**

$$\begin{aligned} \text{a) } D_f &= \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 : 1 - |x-1| > 0 \wedge -y \geq 0 \wedge 1 - (x-1)^2 - (y+1)^2 \geq 0 \wedge \right. \\ &\left. \sqrt{-y} + \sqrt{1 - (x-1)^2 - (y+1)^2} \neq 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \right\} \setminus \{(0, -1), (2, -1), (1, 0)\} \end{aligned}$$

b) O conjunto  $A_k$  representa, para cada  $k \geq 0$ , a circunferência de centro em  $(0,0)$  e raio  $k$ . Como  $fr(D_f) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 1\}$ , basta que o valor de  $k$  seja inferior ao valor da menor distância entre  $(0,0)$  e  $fr(D_f)$ . Assim, para  $0 \leq k < \sqrt{2} - 1$  fica provado que a proposição  $\exists_{k \in \mathfrak{R}} A_k \cap fr(D_f) = \emptyset$  é verdadeira.

**III**

1.  $D_f = \mathfrak{R}^2 \setminus \{(0,0), (1,1)\}$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} f(x, y) = \frac{-m}{1+m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right), \text{ o que prova não existir limite da função no}$$

ponto  $(0,0)$  donde a função não é prolongável à origem por continuidade;

$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x,y) = 0$ , pois é o produto de um infinitésimo por uma função

limitada. Assim existe prolongamento contínuo da função ao ponto  $(1,1)$  e este é definido por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} (x-1) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{(x-1)^2 + (y-1)^2} \right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), (1,1) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

2. a)  $f'_x(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ ,  $f'_y(0,0) \stackrel{\text{def}}{=} 1$ , assim  $\|\nabla f(0,0)\| = \sqrt{2}$

b) Seja  $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \begin{cases} v_1 + v_2 & \text{se } v_1 v_2 = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} & \text{se } v_1 v_2 \neq 0 \end{cases}$

Só existe derivada direccional na origem segundo as direcções dos eixos coordenados e, neste caso, o seu valor é a soma das coordenadas das respectivas direcções.

c) A função não é diferenciável na origem pois não existe derivada direccional na origem segundo qualquer direcção.

#### IV

Tem-se  $g(0,1) = f(0,e,0)$  e sejam

$$u(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2), v(x,y) = e^y, \text{ e } w(x,y) = \log(1+x^2).$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = y^2 \cos(xy^2) f'_u + \frac{2x}{1+x^2} f'_w$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2xy \cos(xy^2) f'_u + e^y f'_v.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = f'_u(0,e,0) + e f'_v(0,e,0) = e - e = 0.$$

## V

$$a) \quad \nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2xy^2 = 0 \\ -2x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Os pontos críticos são todos os pontos da forma  $(0, y)$  com  $y \in \mathfrak{R}$ , ou seja a recta  $x = 0$ .

b) Por definição, o ponto  $(0, 1)$  é um ponto de sela da função se é um ponto crítico, o que ficou provado na alínea anterior, e se não é um extremante, isto é  $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{b, c \in B_\varepsilon((0, 1))} f(b) < f(0, 1) = 3 < f(c)$ .

$$f(h, 1+h)_{h \neq 0} = 3 - h^3(2+h): \begin{cases} < 3 \text{ se } h > 0 \\ > 3 \text{ se } -2 < h < 0 \end{cases}. \quad \text{Assim provámos}$$

que  $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{(h, 1+h): |h| < \varepsilon/\sqrt{2}} f(h, 1+h)_{h > 0} < f(0, 1) < f(h, 1+h)_{h < 0}$ , o que conclui a prova de que o ponto  $(0, 1)$  é um ponto de sela da função.

## VI

Por hipótese  $f(z_0) = 0$ , e para todo o  $z \neq z_0$  podemos escrever

$$f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0), \text{ de forma semelhante se justifica que}$$

$$g(z) = \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} (z - z_0). \quad \text{Tem-se} \quad \text{então}$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} \stackrel{\text{hip}}{=} \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

com  $g'(z_0) \neq 0$  por hipótese.