INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal – 8 de Junho de 2018

Duração: 2 horas

I

Seja a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2+2n}$.

a) **(1,5)** Mostre que o intervalo de convergência absoluta da série é um conjunto compacto.

b) **(1,0)** Calcule a soma da série nos extremos do seu intervalo de convergência.

c) **(1,5)** Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2+2n}$, indique, justificando convenientemente, o valor da derivada $f^{(iv)}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

II

Considere o conjunto $A = \left\{(x,y) \in \Re^2 : \frac{\sqrt{|x-y|-1}}{\ln\left(x^2+y^2\right)} \leq 0\right\}$.

a) (2,0) Representе graficamente o conjunto A e determine o seu derivado A'.

b) (1,0) Determine o menor valor $n \in N$ de modo que seja verdadeira a seguinte frase,

$$\forall_{p,q \in A} \ \|p - q\| \leq n .$$

III

1. **(1,5)** Estude a existência de prolongamento contínuo da função real $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2}sen(x+y)$ aos pontos onde f não está definida, e em caso afirmativo obtenha o prolongamento.

2. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2-x^2}{arctg(x+y)} & se\ y\neq -x\\ 0\ \ se\ y=-x\end{cases}.$$

   a) **(1,0)** Calcule $\nabla f(0,0)$.

   b) **(1,5)** Mostre que existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ segundo qualquer direcção não nula $v\in\Re^2$, e indique o seu valor.

   c) **(2,0)** Estude a diferenciabilidade de *f* no ponto $(0,0)$.

IV

(2,5) Seja $f(x,y,z)=x^n g\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)$, onde g é uma função real diferenciável no seu domínio e $n\in N$. Mostre que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=nf(x,y,z)$.

V

(2,0) Mostre por definição que $(0,0)$ é um ponto de sela da função $f(x,y)=y^2(x-1)+yx$.

VI

(2,5) Seja *f* uma função complexa de variável complexa. Se *f* e a sua conjugada $\overline{f}$ são funções inteiras, prove que *f* é constante.

fim