



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Recurso – 29 de Junho de 2016

Duração: 2 horas

I

1. Seja a equação diferencial  $t^2x''+2tx'-12x=24$  com  $t > 0$ .
  - a) (1,5) Mostre que o espaço linear das soluções da equação homogénea associada admite uma base constituída por funções da forma  $x(t) = t^\alpha$ , para certos valores do parâmetro real  $\alpha$ . Indique-os.
  - b) (2,5) Determine a solução da equação não homogénea que verifica as condições  $x(1) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  é finito.
  
2. Considere o sistema linear  $X' = AX$  onde  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$  e  $b^2 = -4a$ .
  - a) (2,5) Calcule  $e^{At}$ .
  - b) (2,0) Utilize o resultado da alínea anterior para indicar a solução geral da equação  $z'' - 2z' + z = 0$ .

3. Considere a equação diferencial não linear  $x' = 1 - x^2(t)$ .

a) (1,0) Determine os seus pontos de equilíbrio e estude-os quanto à estabilidade.

b) (2,5) Determine a solução do PVI  $\begin{cases} x' = 1 - x^2(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ .

c) (1,0) Mostre que, quando  $t \rightarrow +\infty$ , todas as soluções do PVI tendem para uma das soluções de equilíbrio encontrada na alínea a). Como classifica essa solução de equilíbrio quanto à estabilidade?

## II

(3,0) Use a mudança de variável  $x_n = \text{sen}(y_n)$  para resolver a equação com diferenças finitas  $x_{n+1} - 2x_n \sqrt{1 - x_n^2} = 0$ .

## III

Considere os seguintes caminhos:  $\gamma_1$  é o segmento de recta que une o ponto inicial 0 ao ponto final  $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ , e  $\gamma_2$  une esses mesmos pontos e é definido pela parábola  $\gamma(t) = t + it^2$ . Calcule, usando a definição,

a) (1,5)  $\int_{\gamma_k} e^z dz$  com  $k = 1, 2$ .

b) (1,5)  $\int_{\gamma_k} \left(\frac{1}{z}\right)^2 dz$  com  $k = 1, 2$ .

c) (1,0) Comente os resultados obtidos nas alíneas anteriores.

**fim**