



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Recurso – 3 de Julho de 2017

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI  $\begin{cases} x' - tx = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ .

- a) (1,5) Escreva os quatro primeiros termos do método de iteração de Picard.
- b) (1,5) Com base neste método explicita a solução do PVI.

2. (3,0) Seja a equação diferencial não linear  $t^2 xx' = (x - tx')^2$ , com  $t > 0$ . Resolva a equação, usando a substituição  $x(t) = e^{\int z(t) dt}$ , onde  $z(t)$  é uma nova função incógnita.

3. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}$$

- a) (2,0) Calcule  $e^{At}$ , onde  $A$  é a matriz associada ao sistema. Apresente a solução do sistema que verifica  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ .
- b) (1,5) Para que valores de  $x_0$  e  $y_0$ , existe uma solução do sistema cujo limite é  $0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ?

4. a) (1,5) Determine as soluções de equilíbrio da equação não linear de 1ª ordem  $x'(t) = 9 - x^2(t)$ , e classifique-as quanto à estabilidade.

b) (1,5) Seja  $\varphi(t)$  uma solução da equação dada. Indique o valor lógico das seguintes proposições, justificando convenientemente,

$$\forall_{\varphi(t)} \varphi'(t) = 9 - \varphi^2(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 3$$

$$\exists_{\varphi(t)} \varphi'(t) = 9 - \varphi^2(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = -3.$$

## II

Considere o sistema de equações com diferenças finitas 
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = -x_n \end{cases}$$

a) (2,0) Obtenha a equação de 2ª ordem que a função  $x_n$  verifica.

$$\text{Resolva o PVI } \begin{cases} x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

b) (2,0) Use o resultado da alínea anterior para obter a solução do sistema dado que satisfaz as seguintes condições iniciais  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = -1$  e  $z_1 = 0$ .

## III

Considere a função complexa de variável complexa  $f(z) = \frac{\cot g(z)}{z^2 - \pi z / 4}$ .

a) (2,0) Determine e classifique as singularidades da função.

b) (1,5) Determine o valor do integral  $\int_{|2\pi i + z|=1} f(z) dz$ , justificando convenientemente.

**fim**