



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV - Licenciatura MAEG

Época Normal – 12 de Junho de 2018

Duração: 2 horas

I

1. Considere o PVI 
$$\begin{cases} e^{-t}x^2 + 4x + 2(xe^{-t} + 1)x' = 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}.$$

a) (1,5) Mostre que a equação não é exacta e determine um factor integrante.

b) (2,5) Utilize como factor integrante a função  $\mu(t) = e^{2t}$  para resolver o PVI, e indique o intervalo máximo de existência de solução.

2. Atenda à seguinte

**Definição:** Um sistema dinâmico é uma função de classe  $C^1$ ,  $\phi: \mathcal{R} \times E \rightarrow E$ , onde  $E$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{R}^n$ , e para  $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ ,  $\phi_t$  satisfaz as seguintes condições:

i)  $\phi_0(x) = x \quad \forall_{x \in E}$

ii)  $(\phi_t \circ \phi_s)(x) = \phi_{t+s}(x) \quad \forall_{t,s \in \mathcal{R}} \forall_{x \in E}$ .

a) (1,5) Mostre que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  de coeficientes constantes, então a função  $\phi(t, x) = e^{At}x$  define um sistema dinâmico em  $\mathcal{R}^n$ .

b) (1,0) Mostre que para cada  $x_0 \in \mathcal{R}^n$ ,  $\phi(t, x_0)$  é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

c) (2,0) Determine o sistema dinâmico definido pelo PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = (0,1) \end{cases} \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a equação diferencial  $x''+3x'+kx=0$ , com  $k \in \mathfrak{R}$ .
- (1,0) Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada.
  - (1,5) Sendo  $A$  a matriz associada ao sistema obtido, determine os valores de  $k$  para os quais os valores próprios da matriz  $A$  são negativos e distintos.
  - (2,0) Para  $k=2$  estude a estabilidade da solução da equação.

## II

Seja a equação com diferenças  $2x(n+3)+x(n+2)-5x(n+1)+2x(n)=2^{-n}$ .

- (2,5) Determine a solução geral da equação.
- (1,0) Para que valores das constantes arbitrárias a solução  $x(n)$  verifica

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) < \infty ?$$

## III

Considere a função complexa de variável complexa  $f(z) = \frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ .

- (2,0) Determine e classifique as singularidades da função.
- (1,5) Determine o valor do integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , onde  $\gamma$  é a elipse  $|z+1| + |1-z| = 3$ .

**fim**