INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

**ANÁLISE MATEMÁTICA II - ** Licenciatura MAEG

Época Recurso – 4 de Julho de 2017   Duração: 2 horas

I

Seja a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}$.

a) **(1,5)** Mostre que o intervalo de convergência da série é um conjunto compacto.

b) **(1,5)** Determine a soma da série.

II

Considere a função $d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ definida $\forall_{x,y \in \Re^+}$.

a) **(1,5)** Prove que *d* é uma distância em $\Re^+$.

b) **(1,5)** Justifique se o conjunto $A = [1, +\infty[$ é um conjunto limitado no espaço métrico $(\Re^+, d)$, usando a seguinte propriedade,

Proposição: Um conjunto *K* definido num espaço métrico, é limitado, se e só se tem diâmetro $D(K)$ finito. Onde diâmetro de *K* é o supremo das distâncias entre quaisquer pontos de *K*,

$$D(K) = Sup\{d(x,y) : x, y \in K\}.$$

III

1. Considere a função $f(x,y)=\begin{cases} xy & se\ \ x\neq 0 \\ \mathrm{y} & se\ \ x=0 \end{cases}$.

   a) **(1,5)** Estude a continuidade da função no seu domínio.

   b) **(1,5)** Determine as direcções não nulas $v\in\Re^2$, para as quais existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$, e indique este valor.

   c) **(2,0)** Estude, por definição, a diferenciabilidade de *f* no ponto $(0,0)$.

2. **(2,0)** Seja *f* uma função real, $f\in C^2(\Re^2)$ e que verifica $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\quad \forall_{(x,y)\in\Re^2}$.

   Justifique convenientemente, se pode ser

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3xy+y^2.$$

IV

(2,5) Sejam $f,g:\Re\to\Re$ duas funções de classe C^2, e $F:\Re^2\to\Re$ a função definida por $F(x,y)=f(x+g(y))$. Mostre que $\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

V

(2,5) Estude a existência de extremantes para a função $f(x,y)=x^3-\dfrac{1}{2}xy^2+y^2$.

VI

(2,0) Prove que qualquer função complexa de variável complexa, inteira, não pode ter parte imaginária, $v(x,y)=sen(x+y)$.

fim