LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática I - 1º Semestre - 2018/2019

Teste Intercalar - 12 de Abril de 2019 - Duração: 1 hora e 15 minutos

Nome ______________________ **Número** ________

Espaço reservado a classificações				
1. ____	**2.a)** ____	**2.b)** ____	**3.** ____	**4.** ____
5.a) ____	**5.b)** ____	**6.** ____		**Classificação:** ____

Justifique as suas respostas

1. [1,0 valores] Determine uma base do espaço vetorial gerado pelos vetores linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 9 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 & -10 \\ 0 & -5 & 1 & -7 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A característica da matriz é 2 pelo que qualquer base do espaço vetorial V gerado pelas linhas tem 2 elementos.

Tomando $\underline{e} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, com $\vec{e}_1 = (1,3,2,4,5)$ e $\vec{e}_2 = (0,-5,1,-7,-10)$, $\vec{e}_1 \in V$, $\vec{e}_2 \in V$ e é fácil verificar que $\underline{e}$ é linearmente independente

Logo $\underline{e}$ é uma base de V.

2. Considere a matriz quadrada $J \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$ cujas entradas são todas iguais a 1. Seja $I \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R})$ a matriz identidade.

a) [1,0 valores] Calcule J^2.

Um cálculo simples mostra que $J^2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} = 5J$

b) [1,0 valores] Mostre que $I - J$ é invertível e que

$$(I-J)^{-1} = I - \frac{1}{4}J.$$

$$\left(I - \frac{1}{4}J\right)(I-J) = I - J - \frac{1}{4}J + \frac{1}{4}J^2$$

$$= I - J - \frac{1}{4}J + \frac{5}{4}J = I,$$ pelo que, por definição,

$(I-J)$ é invertível e $(I-J)^{-1} = I - \frac{1}{4}J$.

3. [2,0 valores] Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ considere a matriz $M = \begin{bmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{bmatrix}$.

Mostre que $\det(M) = (x+y+z)^3$.

Sugestão: Ao calcular $\det(M)$, comece por efetuar a transformação sobre as linhas $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2y & -(x+y+z) & 0 \\ 2z & 0 & -(x+y+z) \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)^3.$$

4. [2,0 valores] Classifique, em função dos parâmetros a e b, o sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x-ay+z=-1 \\ -x-y+(a+1)z=b-2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -a & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b-1 \end{array}\right]$$

- O sistema é possível e indeterminado, com 1 grau de liberdade, qd $(a=0$ e $b=1)$ ou $(a=1$ e $b \in \mathbb{R})$, pois $r(A) = r(A|B) = 2$ e $n=3$.
- O sistema é impossível quando $a=0$ e $b \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, pois nesse caso $r(A) = 2 < r(A|B) = 3$

- O sistema é possível e determinado qd $a \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ e $b \in \mathbb{R}$, pois $r(A) = r(A|B) = n = 3$

5. a) [1,0 valores] Considere uma progressão geométrica (u_n) de razão $r \neq 1$.
Mostre que para todo o $N \in \mathbb{N}$,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_N = u_1 \frac{1 - r^N}{1 - r}.$$

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a progressão geométrica dada por $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ e S_N a soma dos primeiros N termos da progressão.

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \cdots + u_1 r^{N-1}$$

Notando que: $S_N - r S_N = u_1 + u_1 r + \cdots + u_1 r^{N-1} - u_1 r - \cdots - u_1 r^N$
$= u_1 - u_1 r^N$,

podemos concluir que

$$S_N (1 - r) = u_1 (1 - r^N) \Leftrightarrow S_N = u_1 \frac{1 - r^N}{1 - r}.$$

b) [1,0 valores] Um agricultor utiliza num dado dia 1000 litros de água para regar as suas plantações. No dia seguinte, gasta $1000 \times 80\% = 800$ litros de água, e, a cada novo dia, gasta 80% do volume de água que utilizou na véspera.
Poderá o agricultor vir a ficar sem ficar sem água, sabendo que a sua reserva inicial era de 4500 litros?

Sabe-se que o agricultor gasta 1000 ℓ de água no 1º dia e que em qualquer outro dia gasta 80% do volume gasto no dia anterior. Assim sendo, no dia N o agricultor gasta

$$q_N = 1000 \times 0.8^{N-1}$$

Assumindo que o agricultor gastará sempre esta regra o seu consumo total máximo é dado por

$$\sum_{N=1}^{\infty} q_N = \sum_{N=1}^{\infty} 1000 \times 0.8^{N-1}$$

$$= 1000 \times \frac{1}{1 - 0.8} = 5000$$

pois temos uma série geométrica com razão $r = 0.8$
como $|r| < 1$, a série é convergente.

Dado que a reserva do agricultor é de 4500 ℓ de água, este poderá ficar sem água.

6. [1,0 valores] Mostre que $\sin(\arctan(3)) = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Sabendo que $\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1-\sin^2(x)}$, para todo o x no domínio da tangente,

tem-se que

$$\sin^2(\arctan(3)) = 1 - \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(3))}$$

$$= 1 - \frac{1}{1+3^2} = 9/10$$

Além disso, a função $f(x) = \arctan(x)$ é tal que

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

e $\arctan(3) > 0$

pelo que $0 < \arctan(3) < \pi/2$.

Assim sendo, $0 < \sin(\arctan(3)) < 1$ de onde se conclui que

$$\sin(\arctan(3)) = \sqrt{9/10} = 3/\sqrt{10}.$$

Espaço adicional para a resolução do teste