Econometria

Formulário

Esmeralda Ramalho

2º Semestre do ano lectivo de 2018/2019

Note-se que a definição dos elementos constantes nas formulas é a estabelecida nas aulas

Modelo de regressão linear para dados seccionais

Estimador OLS: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$, $\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$, $R^2 = \frac{SQE}{SQT} = 1 - \frac{SQR}{SQT}$, $Var(\hat{\beta}|X) = \sigma^2(X'X)^{-1}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{N-k-1}$

Inferência: $t_j = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_{\beta_j}} \sim t(N-k-1)$, F=$\frac{(R^2 - R_*^2)/m}{(1-R^2)/(N-K-1)} = \frac{(SQR_* - SQR)/m}{SQR/(N-K-1)} \sim F(m, N-k-1), LM = NR^2_{\hat{u}^2} \sim X^2_m$

Interpretação de efeitos parciais

Y	X_j	$\Delta X_j = 1 \rightarrow \Delta E(Y\|X) = \beta_j$
ln(Y)	X_j	$\Delta X_j = 1 \rightarrow \Delta E(Y\|X) = 100\beta_j\%$
Y	ln(X_j)	$\Delta X_j = 1\% \rightarrow \Delta E(Y\|X) = \beta_j/100$
ln(Y)	ln(X_j)	$\Delta X_j = 1\% \rightarrow \Delta E(Y\|X) = \beta_j\%$

Variáveis dummy

Modelo tipo log-lin: efeito parcial exacto de uma dummy associada ao coeficiente δ_0 é $[exp(\delta_0) - 1]$*100%

Teste de Chow, modelo base: $Y = \theta_0 + \theta_1 X_1 + \cdots + \theta_k X_k + \gamma_0 D + \gamma_1 DX_1 + \cdots + \gamma_k DX_k + v$; versão do teste F especifica para este teste: $F = \frac{(SQR - SQR_A - SQ\ \ _B)/(k+1)}{(SQR_A + SQR_B)/(N-2(k+1))} \sim F\big((k+1), N-2(k+1)\big)$

Modelos para variável dependente binária

Especificação: $Y \in \{0,1\}$, sendo $E(Y|X) = Pr(Y=1|X)$

Previsão de Y: $\hat{y} = 1\ se\ Pr(\widehat{Y=1}|x) \geq 0.5$

Modelo linear de probabilidade

- Especificação: $Pr(Y=1|X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_k X_k$
- Efeitos parciais: $\Delta X_j = 1 \Longrightarrow \Delta E(Y|X) = \Delta Pr(Y=1|X) = \beta_j$

Logit e probit

- Especificação: $Pr(Y=1|X)=G(\beta_0+\beta_1 X_1+\cdots+\beta_k X_k)$ onde $0 \leq G(.) \leq 1$, com $G(.)=\Phi(x_i'\beta)=\int_{-\infty}^{x\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i'\beta)^2}{2}}dx\beta$ no modelo probit e $G(.)=\Lambda(x_i'\beta)=\frac{e^{x_i'\beta}}{1+e^{x_i'\beta}}$ no modelo logit. Tem-se $E(Y|X)=G(x_i'\beta)$ e $V(Y|X)=G(x_i'\beta)\big(1-G(x_i'\beta)\big)$
- Efeitos parciais:
    - Regressor contínuo: $\Delta X_j=1 \Longrightarrow \Delta Pr(Y=1|X)=\beta_j g(x_i'\beta)$,

      onde $g(x_i'\beta)=\phi(x_i'\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i'\beta)^2}{2}}$ no modelo probit e $g(x_i'\beta)=\lambda(x_i'\beta)$ $\Lambda(x_i'\beta)[1-\Lambda(x_i'\beta)]$ no modelo logit

    - Regressor discreto: quando se passa de $X_j=c$ para $X_j=c+1 \Longrightarrow \Delta Pr(Y=1|X)=G\big(\beta_0+\cdots\beta_j(c+1)+\cdots\big)-G\big(\beta_0+\cdots\beta_j c+\cdots\big)$
    - Avaliação:
        - média dos regressores: efeito parcial avaliado na média
        - para todos os indivíduos e depois feita a média: efeito parcial médio
- Estimação: $LL=\sum_{i=1}^{N}\{y_i\ln[G(x_i'\beta)]+(1-y_i)\ln[1-G(x_i'\beta)]\}$
- Inferência: $LR=2(LL-LL_*)\sim\chi_m^2$, para m restrições, $W=\frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\sim N(0,1)$

Análise de regressão básica com séries temporais

Modelo FDL(q): $y_t=\alpha_0+\alpha_1 x_t+\alpha_2 x_{t-1}+\cdots+\alpha_{q+1}x_{t-q}+u_t$

- Modelo estático para $\alpha_2=\cdots=\alpha_{q+1}=0$
- Multiplicador/propensão de impacto: α_1
- Multiplicador/propensão de longo prazo: $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{q+1}$

Hipóteses e propriedades dos estimadores OLS em pequenas amostras:

- Linearidade nos parâmetros; 2) ausência de colineariedade perfeita; 3) exogeneidade estrita: $E(u_t|X)=0, \forall t \rightarrow Cov(x_{sj},u_t)=0\ \forall t,s,j$; 4) Homoscedasticidade: $Var(u_t|X)=\sigma^2$; 5) Ausência de autocorrelação: $Corr(u_t,u_s|X)=0, \forall t \neq s$; 6) Normalidade: $u_t\sim N(0,\sigma^2)$
- 1-3: estimadores centrados; 1-5 (pressupostos de Gauss-Markov): estimadores BLUE; 1-6: estimadores normalmente distribuídos $\hat{\beta}|X\sim\boldsymbol{N}(\beta,\sigma^2(X'X)^{-1})$ e testes t e F e IC validos

Tendência

- Modelo de tendência linear: $y_t=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 x_{t1}\ldots+u_t$: $\Delta t=1 \Rightarrow \Delta y_t=\beta_1$
- Modelo de tendência exponencial: $ln(y_t)=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 x_{t1}\ldots+u_t$: $\Delta t=1 \Rightarrow \%\Delta y_t=100*\beta_1\%$
- Modelo de tendência quadrática: $y_t=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2+\beta_3 x_{t1}\ldots+u_t$: $\Delta t=1 \Rightarrow \Delta y_t=\beta_1+2\beta_2 t$
- Processo de detrending: para cada variável do modelo: 1) Estimar o modelo $w_t=\alpha_0+\alpha_1 t+e_t$; 2) Obter: $\ddot{w}_t=w_t-(\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 t)$

Sazonalidade: Incorpora-se no modelo através de 3, 11, e 6 dummies que correspondem a estações do ano, meses, ou dias. Dessazonalizar, corresponde ao processo de "detrending"

Séries temporais estacionárias e fracamente dependentes

Processo estocástico estacionário: processo cuja distribuição é sempre a mesma $\forall t$

Processo estocástico estacionário em covariância: para o intervalo de tempo h: $E(y_t) = \mu$; $V(y_t) = E(y_t - \mu)^{\,2} = \sigma^2$; $Cov(y_t, y_{t-h})$ pode depender de h mas não de t

Processo fracamente dependente: requer y_t e y_{t+h} "quase" independentes para $h \to \infty$. Com estacionaridade em covariância, será assimptoticamente não correlacionada se $Cov(y_t, y_{t+h}) \to 0$, $h \to \infty$

Ruido Branco: $y_t = \varepsilon_t$, onde $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$, $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$ para $h \neq 0$

Modelo AR(1): $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$, onde $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, $\text{E}(y_t) = 0$; $\text{V}(y_t) = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$; $\text{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \gamma_h = \rho^h \sigma^2$; $\text{Cor}(y_t, y_{t-h}) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \rho^h$. Processo estacionário e fracamente dependente se $|\rho| < 1$

Modelo MA(1): $y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$, $|\theta| < 1$, onde $\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$, $\text{E}(y_t) = 0$, $\text{V}(y_t) = \sigma^2(1 + \theta^2)$, $\text{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \begin{cases} \theta\sigma^2 se\ h = 1 \\ 0\ se\ h > 1 \end{cases}$, $\text{Cor}(y_t, y_{t-h}) = \begin{cases} \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} = \frac{\theta}{(1+\theta^2)} se\ h = 1 \\ 0\ se\ h > 1 \end{cases}$. Processo estacionário e fracamente dependente

Processo estacionário em tendência: $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$, onde $\text{E}(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t$. Sendo apenas estacionário em tendência, pode ser estimado por OLS, se u_t for fracamente dependente

Hipóteses e propriedades dos estimadores OLS em termos assimptoticos:

- 1´. Linearidade nos parâmetros, juntamente com dependência fraca; 2´. Ausência de colineariedade perfeita; 3´. $E(u_t|\boldsymbol{x}_t) = 0$ exogeneidade contemporânea; 4´. Homoscedasticidade: $Var(u_t|X) = Var(u_t) = \sigma^2$; 5´. Ausência de autocorrelação: $Corr(u_t, u_s|X) = 0, \forall t \neq s$
- 1´-3´: estimadores consistentes; 1´-5´ estimadores normalmente distribuídos, e testes t, F e LM assimptoticamente válidos

Séries temporais altamente persistentes

- **Passeio Aleatório:** $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, onde $E(y_t) = 0$, $V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 t$, $\text{Cor}(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$
- **Passeio Aleatório com deslocação**: $y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$, onde $E(y_t) = \alpha t + y_0$, $V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 t$
- **Ordem de integração**
  - I(0): série fracamente dependente – OLS pode ser directamente usado
  - I(1): processo de raiz unitária cuja primeira diferença é I(0). Um processo I(1) é estacionário às diferenças

Modelo dinamicamente completo: satisfaz o pressuposto 5 de ausência de autocorrelação

Autocorrelação

Autocorrelação AR(1): $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| <1$, $\varepsilon_t \sim$ ruido branco

Autocorrelação AR(p): $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} \ldots \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim$ ruido branco

Testes de autocorrelação: modelos auxiliares

- t_ρ: $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$
- H-alt de Durbin: :$\hat{u}_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + \rho\hat{u}_{t-1} + e_t$
- Breusch-Godfrey: $\hat{u}_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + \rho_1\hat{u}_{t-1} + \rho_2\hat{u}_{t-2} + \cdots + \rho_p\hat{u}_{t-p} + e_t, LM = (N - p)R^2_{\hat{u}^2} \sim X^2_p$

Modelos FGLS:

- Cochrane-Orcutt: $y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t$
- Prais-Winsten: $\begin{cases} \sqrt{1-\rho^2}y_1 = \beta_0\sqrt{1-\rho^2} + \beta_1\sqrt{1-\rho^2}x_1 + \sqrt{1-\rho^2}u_1 \\ y_t - \rho y_{t-1} = \beta_0(1-\rho) + \beta_1(x_t - \rho x_{t-1}) + u_t \end{cases}$

Heteroscedasticidade

Testes de heteroscedasticidade: modelos auxiliares

- Breusch Pagan: $\hat{u}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \cdots + \gamma_k X_k + e$
- White (k=2): $\hat{u}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 {X_1}^2 + \gamma_4 {X_2}^2 + \gamma_5 X_1 X_2 + e$

Agregação de dados seccionais de diferentes períodos de tempo

Formalização genérica do modelo linear: $y_{it} = \beta_0 + \beta_1 x_{it1} + \cdots + \beta_k x_{itk} + u_{it}, i = 1, \ \ldots N\ , \ t = 1, \ \ldots T$

Introdução de time-dummies e interações

Em dados anuais, para T anos , toma-se o primeiro ano como referência e consideram-se $(T-1)$ dummies, uma para cada um dos restantes anos

- Efeito dos regressores sobre y inalterados no tempo: incluem-se essas dummies, que afectarão o intercepto do modelo
- Efeitos parciais dos regressores alteram-se no tempo: acrescentam-se também termos de interação, podendo-se usar o teste Chow para quebra de estrutura

Avaliação do efeito de uma política: estimador diferenças nas diferenças ou **efeito médio do tratamento**

- Amostra em dois momentos diferentes (antes e após a implementação) e dois grupos de indivíduos (não afectados – grupo de controle - e afectados – grupo de tratamento)

	Antes	**Após**	**Após-Antes**
Cont. (longe)	β_0	$\beta_0 + \gamma_1$	$\gamma_1 = E[p_{apos} - p_{antes} \mid cont] \rightarrow 1^{\text{a}}$ dif
Trat. (perto)	$\beta_0 + \beta_1$	$\beta_0 + \gamma_1 + \beta_1 + \delta_1$	$\gamma_1 + \delta_1 =$ $= E[p_{apos} - p_{antes} \mid trat] \rightarrow 1^{\text{a}}$ dif
Trat. – Cont.	β_1	$\beta_1 + \delta_1$	$\boldsymbol{\delta_1} \rightarrow$ dif in dif

Dados de painel, T=2

Modelo com efeitos individuais: $y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$ $\quad (i = 1, \dots, N; t = 1, \ \dots, T)$

- Efeitos fixos: α_i e x_{it} correlacionados → Estimadores "pooled" OLS enviesados
- Efeitos aleatórios: α_i e x_{it} não são correlacionados → Estimadores "pooled" OLS válidos

Estimador "pooled" OLS : $y_{it} = \alpha + x'_{it}\beta + v_{it}$

Estimador das primeiras diferenças: $\Delta y_{it} = \Delta x'_{it}\beta + \Delta u_{it}$

- Se o modelo inicial incluir uma time-dummy, o modelo às diferenças terá um intercepto, que é o coeficiente da time-dummy:

Dados de painel, T>2

$\Delta y_{it} = \Delta x'_{it}\beta + \Delta u_{it},\ t = 2,\ 3, \dots$ ou $\Delta y_{it} = \alpha + \delta_1 d2 + \delta_2 d3 + \Delta x'_{it}\beta + \Delta u_{it},\ t = 2,\ 3, \dots$