INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 3 de Junho de 2019

Duração: 2 horas

I

1. **(3,0)** Resolva o PVI $\begin{cases} \left(x^2 + \log t.\cos x\right)x' = 1 - \dfrac{senx}{t} \\ x(1) = 3 \end{cases}$.

2. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_3 \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 + 7x_3 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}.$$

a) **(2,5)** Determine e^{At}, onde A é a matriz associada ao sistema, e calcule a solução do sistema que verifica a condição inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ e $x_3(0) = -1$.

b) **(2,0)** Para que condições iniciais $x_1(0), x_2(0)$ e $x_3(0)$, existe uma solução não nula, limitada para $t \geq 0$.

3. Considere a equação de Riccati $x' = -x^2 - x + 2$.

   a) **(2,0)** Determine e classifique as soluções de equilíbrio quanto à estabilidade.

   b) **(2,5)** Seja $x_0 \in \Re$. Resolva o seguinte PVI e estude o comportamento das suas soluções, $\begin{cases} x' = -x^2 - x + 2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

II

Considere a equação com diferenças finitas não linear,

$$y_{n+1} y_n = \alpha y_{n+1} + \beta y_n + \gamma \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \neq 0.$$

a) **(2,0)** Mostre que a substituição $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n} + \alpha$, reduz a equação não linear a uma equação linear, e verifique que condições devem satisfazer as constantes α, β, γ de modo que a equação obtida seja de 2ª ordem.

b) **(2,0)** Obtenha a solução da equação não linear, considerando os seguintes valores $\alpha = -2,\ \beta = -4,\ \gamma = -9$.

III

1. **(2,0)** Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - 3iz - 2}\, dz$.

2. **(2.0)** Seja *f* uma função holomorfa no disco $\overline{D(z_0, r)}$, $z_0 \in C$ e $r > 0$. Prove que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) dt.$$

fim