



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV - Licenciatura MAEG

Época Recurso – 2 de Julho de 2019

Duração: 2 horas

I

1. **(3,0)** Resolva o PVI  $\begin{cases} x' = x^2 + (1 - 2t)x + t^2 - t + 1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$ , observando que  $x(t) = t$  é

uma solução da equação diferencial.

2. Considere equação linear

$$x'''+\alpha x''+\beta x'+\gamma x=0, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}.$$

- a) **(2,5)** Determine o valor das constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  de modo que  $(1, t, e^t)$  constitua um sistema fundamental de soluções da equação dada,  $P(D)x = 0$ .

- b) **(2,5) Tome**  $\alpha = -1, \beta = -2, \gamma = 0$ . Resolva a equação não homogénea  $P(D)x = t$ .

3. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = 2x^2 - 6xy \\ y' = y^2 + 2y - xy \end{cases}$$

- a) **(3,0)** Determine as soluções de equilíbrio, e estude-as quanto à estabilidade.

- b) **(2,0)** Resolva o PVI  $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = (0,1) \end{cases}$  correspondente ao sistema linearizado

$$A = Df(0, -2).$$

## II

(3,0) Determine o termo geral da sucessão de números naturais  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que verifica as seguintes condições,

$$\Delta^2 u_n = n + 1 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1.$$

## III

1. (1,5) Calcule o valor do integral  $\int_{|z-3i|=1} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2 - 2iz + 3} dz$ .
2. (2,5) Seja  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$  com  $\varphi$  e  $\psi$  funções analíticas no ponto  $z_0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$  e  $\psi'(z_0) \neq 0$ . Sem usar a regra de Cauchy em  $C$ , prove que  $z_0$  é um pólo simples de  $f$ , e  $\text{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ .

**fim**