Matemática I – Gestão do Desporto – 2019/2020

Exercícios

Capítulo I. Elementos de lógica Matemática e Teoria de conjuntos

1. Prove que, quaisquer que sejam as proposições p, q e r, se tem
   a) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (comutatividade da disjunção)
   b) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ (associatividade da disjunção)
   c) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutatividade da conjunção)
   d) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (associatividade da conjunção)
   e) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributividade da conj. a respeito da disj.)
   f) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividade da disj. a respeito da conj.)
   g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (transitividade da implicação)
   h) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
      $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$ (1^{as} leis de De Morgan)
   i) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
   j) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q)$ (negação duma implicação)
   k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$ (regra do contra-recíproco)

2. Prove que, quaisquer que sejam as proposições p e q, são verdadeiras as seguintes proposições
   a) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
   b) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)$

3. Determine os valores lógicos das proposições p, q e r que tornam verdadeira a proposição
   a) $[(\sim p) \wedge q] \vee (\sim q)$
   b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee q$
   c) $p \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$

4. Sem usar calculadora, preencha com os símbolos " $<$ ", " $>$ " ou " $=$ ", de modo a obter proposições verdadeiras
   a) $\ln 15 \;\ldots\; \ln 2$
   b) $\ln 15 \times \ln 2 \;\ldots\; 0$
   c) $e^{15} \;\ldots\; e^{2}$
   d) $e^{-15} \times e^{7} \;\ldots\; 0$
   e) $5^2 + 3^2 \;\ldots\; 8^2$
   f) $5^2 \times 3^2 \;\ldots\; 8^2$
   g) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \;\ldots\; \frac{3}{6}$
   h) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \;\ldots\; \frac{2}{9}$
   i) $\frac{4}{7} \times \frac{7}{5} \;\ldots\; \frac{4}{5}$

5. Indique o valor lógico de cada proposição (justificando)
   a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 > 1$
   b) $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 + 1 > 1$
   c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x > 2 \Rightarrow x > 1$
   d) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
   e) $\exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \quad y = x^2$
   f) $\exists x, y \in \mathbb{R} \quad (x-y)^2 = x^2 - y^2$
   g) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x-y)^2 = x^2 - y^2$
   h) $\forall x \in \mathbb{Z} \ \exists y \in \mathbb{Z}\colon \ x + y = 0$
   i) $\exists y \in \mathbb{Z} \ \forall x \in \mathbb{Z}\colon \ x + y = 0$

6. Escreva a negação de cada uma das condições seguintes
   a) $x > z \ \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
   b) $\forall x \quad y = x^2$
   c) $\exists x \quad y = x^2$
   d) $\forall x \ \forall y \quad z - x = x - y$
   e) $\exists x \ \forall y \quad x > y \ \Rightarrow \ x + y = 0$
   f) Se chover, vou ao cinema
   g) Gosto de ameixas
   h) Ou eu estudo, ou a vida complica-se
   i) Hoje não vou à praia
   j) Todos os peixes são pequenos
   k) Não como peixe nem como carne
   l) Há pelo menos uma rua suja
   m) Tenho fome. Logo, vou comer

7. Preencha com um dos símbolos $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$, de forma a obter proposições verdadeiras em $\mathbb{R}$

a) $x = \sqrt[3]{8} \ \ldots \ x = 2$
b) $x^2 > 0 \ \ldots \ x > 0$
c) $x^2 < 9 \ \ldots \ x < 3$
d) $x(x^2+1) = 0 \ \ldots \ x = 0$
e) $x(x+3) < 0 \ \ldots \ x > -3$

8. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras
   a) $\emptyset \subset \emptyset$
   b) $1 \in \{1\}$
   c) $1 \subset \{1\}$
   d) $1 \notin \{2\}$
   e) $\{1\} \in \{1,2,3\}$
   f) $\{1,2,3\} \supset \{2,3\}$
   g) $1 \in \big\{1, \{2,3\}\big\}$
   h) $\{2,3\} \in \big\{1, \{2,3\}\big\}$
   i) $\emptyset = \{x\colon \ x \in \mathbb{N} \ \wedge x = x + 1\}$

9. Sejam $A = \{2,3,4\}$, $B = \{2,5,6\}$, $C = \{5,6,2\}$ e $D = \{6\}$.
   a) Indique o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações
      $4 \in C$; $5 \in C$; $A \subset B$; $D \subset C$; $B = C$; $A = B$.
   b) Determine:
      $A \cap B$; $A \cup B$; $A \backslash B$; $B \backslash A$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; $A \cup B \cup C \cup D$; $A \cap B \cap C$; $A \cap B \cap C \cap D$.

10. Sejam A, B e C conjuntos não vazios.
    Mostre que as seguintes afirmações são falsas
    a) $A \setminus B = B \setminus A$
    b) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$
    c) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$
    d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

11. a) Mostre que $\overline{A \cap \overline{B}} = \bar{A} \cup B$.
    b) Complete as afirmações da coluna da esquerda com um e um só dos conjuntos da coluna da direita de modo a obter propriedades válidas para quaisquer conjuntos A e B.

(1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = \cdots$	(i) $A \cap \overline{B}$
(2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = \cdots$	(ii) A
(3) $A \backslash B = \cdots$	(iii) B
(4) $A \cap (A \cup B) = \cdots$	(iv) $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$
(5) $A \cup B = \cdots$	(v) A

12. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,4\}$. Determine $A \times B$, $B \times A$ e B^2.

Capítulo 2. Números reais

1. Indique o conjunto solução de cada uma das seguintes condições

a) $|x - 1| > -5$
b) $|x - 1| \leq -5$
c) $|3 - 2x| < 1$
d) $|1 + 2x| \leq 1$
e) $|x - 5| \leq |x + 1|$
f) $|x^2 - 2| < 1$
g) $|2 + 3x| \geq 1$
h) $|x + 4| > |x - 2|$
i) $|x + 4| > x - 2$
j) $|x^2 - 5| \geq 2$

k) $|2x-1| = |4x+3|$
l) $|3 - x^{-1}| < 1$
m) $|2x-1| - x \geq 2$
n) $\frac{x}{1+|x|} \leq 2$
o) $\frac{y}{y^{-1}} < \frac{y^{-1}}{y}$
p) $x(x-1) - 5x \geq 3x^2$
q) $25x^2 - 10x < -1$
r) $\frac{2x}{x-3} + \frac{6}{x+3} = -\frac{28}{x^2-9}$
s) $\frac{x}{x-1} - 7 \leq \frac{1}{x-1}$
t) $x < x^2 - 12 \leq 4x$
u) $x^3 - x > 0$

2. Sem fazer cálculos, interprete geometricamente os seguintes conjuntos e, com base nessa interpretação, escreva-os como intervalo ou união de intervalos
$A = \{x \in \mathbb{R}:\ |x| < 1\}$
$B = \{x \in \mathbb{R}:\ |x| < 0\}$
$C = \{x \in \mathbb{R}:\ |x-3| > 2\}$
$D = \{x \in \mathbb{R}:\ |x+3| < 1\}$
$E = \{x \in \mathbb{R}:\ |x| > 0\}$
$F = \{x \in \mathbb{R}:\ |x-1| \geq |x|\}$
$G = \{x \in \mathbb{R}:\ |x+1| < |x-3|\}$

3. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes condições (considerando o universo dos números reais)
a) $x + 2 = \sqrt{4x+13}$
b) $|x+2| = \sqrt{4-x}$
c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$
d) $\sqrt{x-4} = \sqrt{x+5} - 9$

4. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das proposições, considerando nas três primeiras alíneas o universo dos números reais
a) $|2-3x| < 4 \ \Rightarrow\ x < 2$
b) $x < 5 \ \Rightarrow |x| < 5$
c) $|x-4| > 1 \ \Rightarrow x > 5$
d) $\forall x > 0\ \exists y > 0\ \ |x - 2y| = 3$
e) $\exists x \in \mathbb{R}\ \ |x+4| = |x-2|$

5. Determine, em $\mathbb{R}$, os majorantes, os minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam), o interior, o exterior, a fronteira, o fecho e o derivado dos seguintes conjuntos. Em cada caso, classifique cada um dos conjuntos relativamente a ser limitado, aberto, fechado e compacto.
   a) $\{1, sin2, \pi, e\}$
   b) $\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n},\ m,n \in \mathbb{N}\}$
   c) $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$
   d) $\{(-1)^n \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
   e) $[2,3[\cup[4,10[$
   f) $[2,3] \cap \mathbb{Q}$
   g) $]5,7[\cup\{15\}$
   h) $(2,4)\backslash\{3\}$

6. Para cada um dos conjuntos obtidos nas alíneas e, l, m, n, o, u do exercício 1,
   a) Indique os majorantes, os minorantes e, caso exista, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo e conclua se se trata de um conjunto limitado.

   b) Indique o interior, a fronteira, o exterior, a aderência e o derivado, concluindo se o conjunto é aberto ou fechado. Diga também se se trata de um conjunto compacto.

7. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}:\ |3x-4| \geq x^2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}:\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 4k\}$. Determine $A, A \cap B$ e $A\backslash B$.

8. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}: |3x-4| \geq x^2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{|x|} \in \mathbb{N}\}$. Determine $A, A \cap B, A\backslash B$ e o derivado de cada um destes três conjuntos.

9. Determine o interior, o exterior a fronteira e o derivado do conjunto
$$A = \{x \in \mathbb{Q}: |x+3| < 5\}\ \cup\ \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}:\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{13}\}.$$
Indique, caso exista, o máximo e o mínimo de A.

10. Sejam $A = \{x \in \mathbb{R}: \left|\frac{x^2}{x-2}\right| \leq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R}: y = (-1)^n \left(2+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\}$. Determine $int(A \cup B), (A \cup B)'$ e $sup(A \cap B)$.

11. Sendo $A = \{y \in \mathbb{R}: \left|1-\frac{1}{y}\right|\left|1+\frac{1}{y}\right| < \frac{1}{y^2}\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R}: y = \left(\frac{1+2n}{2^n}\right) \wedge\ n \in \mathbb{N}\}$,
    a) Determine A sob a forma de intervalo de números reais ou reunião de intervalos;
    b) Determine, caso existam, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.