Gestão do Desporto

Matemática I

2019/2020

Lígia Amado

Cap 1. Elementos de Lógica Matemática e de Teoria de Conjuntos (revisão)

- Em qualquer linguagem há
  - palavras
  - frases
  - gramática
  - …
- É preciso conhecer a linguagem correta para nos entendermos

§1.1. Designações e proposições. Álgebra proposicional

§1.1.1 Designações e proposições

- **Designação** (nome ou termo) indica um determinado objeto (matemático ou não).

- Ex: a) lápis de carvão b) π c) $\frac{3}{paula}$ d) $2-5$

  e) 2<5 f) $\mathbb{N}$ g) $\mathbb{N}_0$ h) $\mathbb{Z}$

  i) $\mathbb{Q}$ j) $\mathbb{R}$ k) $\mathbb{C}$

- Obs. 1) Não se pode atribuir um valor lógico (V/F) a uma designação

  2) Numa designação não há variáveis

- **Designações equivalentes** são as que indicam o mesmo objeto

- Ex: 1 e $\frac{2+4}{6}$ são designações equivalentes. Escreve-se $1 = \frac{2+4}{6}$.

- **Proposição (ou frase)** é uma afirmação relativamente à qual se pode atribuir um valor lógico (V ou F).

- Ex

proposição?	valor lógico	proposição?	valor lógico
a) $6 = 8 - 2$		d) $3 \geq$	
b) $3 \geq 3$		e) $\mathbb{Z} \supset \mathbb{R}$	
c) $0 \in \mathbb{N}$			

- Obs: Numa proposição não há variáveis

- Duas **proposições** p e q dizem-se **equivalentes** se tiverem o mesmo valor lógico.
  (escreve-se $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ e lê-se p é equivalente a q)

- Ex a) $6 = 8 - 2 \Leftrightarrow 6 = 6$
  b) $3 \geq 3 \Leftrightarrow$ O ISEG faz parte da Universidade de Lisboa
  c) $0 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{Z} \supset \mathbb{R}$

§1.1.2. Álgebra proposicional (operações com proposições)

operação:	escreve-se:	lê-se:
1. negação	$\sim p$	não p
2. conjunção (ou produto lógico)	$p \wedge q$	p e q
3. disjunção (ou soma lógica)	$p \vee q$	p ou q
4. implicação	$p \Rightarrow q$	p implica q / se p então q
5. equivalência	$p \Leftrightarrow q$	p é equivalente a q / p se e só se q

- Todas as operações anteriores, transformam uma ou mais proposições numa nova proposição.

  Qual o valor lógico dessa nova proposição?

- **Tabela de verdade** das operações lógicas:

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

- **Prioridades** das operações: 1º) $\sim$
  2º) $\wedge, \vee$
  3º) $\Rightarrow$
  4º) $\Leftrightarrow$

- Ex: Coloque parêntesis de modo a obter uma proposição equivalente à dada

  a) $p \wedge \sim q \vee r \Rightarrow q \wedge \sim r \Leftrightarrow q \Rightarrow p$ b) $q \Rightarrow \sim q \vee \sim r \wedge p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow q$

- Ex.: Sejam p: "2 é par"
  q: "2 é negativo".
  Aplique as operações lógicas às proposições dadas, interprete em linguagem corrente e obtenha o respectivo valor lógico.

- Ex.: Seja p uma proposição verdadeira e q uma proposição falsa.
  Obtenha o valor lógico das seguintes proposições:
  a) $p \vee \sim q \Rightarrow \sim p$
  b) $p \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$

- **Propriedades das operações lógicas**:

1) dupla negação $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2) comutativa $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

3) associativa $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

4) distributiva $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (da conjunção relativamente à disjunção, à dta)
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (dem)

5) 1^{as} Leis de De Morgan $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$ (dem)
$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$ (dem: TPC)

6) (muito importante) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$ (dem: TPC)

7) negar uma implicação $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$ (dem: TPC)

8) contra recíproco $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$ (dem: TPC)

- TPC: além das demonstrações assinaladas, ex2 e ex3.

- Obs: Dadas duas proposições p e q,
  p é condição suficiente (c.s.) para q: $p \Rightarrow q$
  q é condição necessária (c.n.) para p: $p \Rightarrow q$
  p é condição necessária e suficiente para q: $p \Leftrightarrow q$

- Ex: p: ganhar o euromilhões
  q: jogar o euromilhões
  ? É $p \Rightarrow q$ ou $q \Rightarrow p$?

  R: Jogar o euromilhões (q) é condição necessária para ganhar o euromilhões (p) mas não é condição suficiente, ou seja
  $$p \Rightarrow q \quad (\text{mas} \quad q \nRightarrow p)$$
  (Ilustrar contra-recíproco)

§1.2. Expressões com variáveis

- Ex: $3x, \ \ 7 = 2x + 1, \ \ \sqrt{x}$

- Expressões com variáveis:
  - **expressões designatórias**:
    convertem-se em designações ao substituir a/as variáveis por valores convenientes
  - **expressões proposicionais** ou **condições**:
    convertem-se em proposições ao substituir a/as variáveis por valores convenientes

- Ex: Classifique (designação/expressão designatória/proposição/condição)
  $$2 + x, \qquad y > 3, \qquad x \in \mathbb{Z}, \qquad \frac{1}{y} - x + 2, \qquad 0 < 0, \qquad 3^2$$

- Obs: As operações lógicas ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) definidas sobre as proposições, estendem-se às condições.

- Ex: Estabeleça equivalências ou implicações ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow$) entre as seguintes condições

a) $x > 3 \vee x = 3$ ... $x \geq 3$
b) $\sim(x > 1)$ ... $x \leq 1$
c) $\sim(x > 1)$ ... $x < 1$
d) $x^2 > 0$ ... $x \neq 0$
e) $x > 3$ ... $x > -1$
f) $x < 0$ ... $x + 2 < 0$

§1.3. Quantificadores

- Obs: Uma condição pode ser transformada numa proposição,
  substituindo as variáveis por valores

  ou

  introduzindo quantificadores:

  $\forall$ – **quantificador universal**
  lê-se "qualquer que seja" ou "para todo" ou " para cada"

  $\exists$ – **quantificador existencial**
  lê-se "existe pelo menos um" ou "para algum"

- Ex: $x > 3$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x > 3$
  $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x > 3$

- Seja $p(x)$ uma condição.

$\forall x \;\; p(x)$ lê-se "qualquer que seja x, tem-se $p(x)$" ou "para todo o x, tem-se $p(x)$" "para cada x, tem-se $p(x)$"

$\exists x \;\; p(x)$ lê-se "existe pelo menos um x tal que $p(x)$" "para algum x, tem-se $p(x)$"

$\exists^1 x \;\; p(x)$ lê-se " existe um e um só x tal que $p(x)$"

- Ex: Indique o valor lógico das seguintes proposições

a) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 + 1 > 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x^2 \leq 0$

c) $\exists x \in \mathbb{N} \;\; x^2 \leq 0$

d) $\exists x \in \mathbb{R} \;\; x^2 - 3 = 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

f) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \quad y < x$

g) $\exists y \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad y < x$

- Obs: Quantificadores de tipo diferente não se podem trocar (isto é, se trocar a ordem, a proposição não é equivalente à original)

  Os do mesmo tipo podem trocar a ordem.

- Como negar um quantificador?

$$\left.\begin{array}{l} \sim (\forall x: \; p(x)) \Leftrightarrow \quad \exists x: \; \sim p(x) \\ \sim (\exists x: \; p(x)) \Leftrightarrow \quad \forall x: \; \sim p(x) \end{array}\right\} \; 2^{as} \text{ Leis de De Morgan}$$

- Ex: negar f) e g), do início deste slide

- Ex. Indique o valor lógico da proposição e negue-a

  a) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^2 > 0$

  b) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 3$

- TPC: 5, 6abehijk, 7.

§1.4. Conjuntos: Operações fundamentais

- Considerem-se os seguintes conjuntos

  $\{x: \ x \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ x \leq 5\}$

  $\{x \in \mathbb{N}_0 : x \leq 5 \ \wedge \ x > 0\}$

  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Todos representam o conjunto dos números naturais não superiores (isto é, menores ou iguais) a 5.

- Indique o valor lógico das seguintes proposições

  a) $\{x, y, z\} = \{y, z, x\}$

  b) $(x, y, z) = (y, z, x)$

- Notação: letras maiúsculas para conjuntos

- Sejam A e B conjuntos.

  Como se lê e o que quer dizer $A \subset B$?

…

- Def: $A \subset B \iff \forall x, \ x \in A \Rightarrow x \in B$

  ou $\forall x \in A, \ x \in B$

- TPC: Qual a def de $A \not\subset B$?

- Obs: 1) $A \subset B \Leftrightarrow \ B \supset A$

  2) Se $A \subset B$ e $A \neq B$ diz-se que A está contido estritamente em B
  ou A é subconjunto próprio de B

  3) $A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \wedge \ B \subset A$

  4) $\forall A, \ \emptyset \subset A$

  5) elemento $\in$ / $\notin$ conjunto
  conjunto $\subset$ / $\supset$ / $\not\subset$ / $\not\supset$ / $=$ conjunto

- Exer8. Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras

  a) $1 \in \{1\}$
  b) $1 \subset \{1\}$
  c) $1 \notin \{2\}$
  d) $\{1\} \in \{1,2,3\}$
  e) $\{1,2,3\} \supset \{2,3\}$
  f) $1 \in \{1, \{2,3\}\}$
  g) $\{2,3\} \in \{1, \{2,3\}\}$
  h) $\emptyset = \{x: \ x \in \mathbb{N} \ \wedge x = x + 1\}$

- Operações com conjuntos:

Vamos exemplificar as operações com $A = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x \leq 6\}$

Caso Geral: Sejam $A, B \subset X$, $A = \{x \in X: p(x)\}$
$B = \{x \in X: q(x)\}$

operação	escreve-se	lê-se	significado
Interseção	$A \cap B$	A interseção B	$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$ $= \{x \in X: p(x) \wedge q(x)\}$
Reunião	$A \cup B$	A (re)união B	$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$ $= \{x \in X: p(x) \vee q(x)\}$
Diferença	$A \backslash B$	A menos B (ou complementar de B em A)	$A \backslash B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$ $= \{x \in X: p(x) \wedge (\sim q(x))\}$

- Def: A e B são **conjuntos disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$.

- Def: Sendo X o universo, o **complementar de** A é o conjunto $A^c = \bar{A} = \{x \in X: x \notin A\}$.

- Algumas propriedades das operações sobre conjuntos:

1. $A \cap A =$
2. $A \cap (B \cup C) =$
   $A \cup (B \cap C) =$
3. $(A^c)^c =$
4. $A \cap U =$
   $A \cap \emptyset =$
5. $(A \cap B)^c =$
   $(A \cup B)^c =$
6. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$

- Def: produto cartesiano de A por B é o conjunto
  $A \times B = \{(x, y) \colon \; x \in A \;\; \wedge \;\; y \in B\}$.

- Obs: $A^2 = A \times A = \{(x, y) \colon \; x \in A \;\; \wedge \;\; y \in A\}$

- Ex: $A = \{-1,5\}$; $B = \{0,1,2\}$
  $A \times B =$
  $A^2 =$

- TPC: 9ab, 10ac, 11, 12.