Cap 2. Números reais

2.1. Conceitos básicos: revisões

- **Módulo** ou **valor absoluto** de $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

- Propriedades do módulo: $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

  1) $|x| \geq 0$,

  2) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \lor x = -a$, **se $a \geq 0$**

     Obs: se $a < 0$ então $|x| = a \Leftrightarrow \ldots$

  3) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \land x \geq -a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $(a \geq 0)$

     Obs: se $a < 0$ então $|x| \leq a \Leftrightarrow \ldots$

  4) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \lor x \leq -a$, $(a \geq 0)$

     Obs: se $a < 0$ então $|x| \geq a \Leftrightarrow \ldots$

- Ex. Indique o conjunto solução (S) das seguintes condições

  a) $|2x + 3| = 2$

  b) $|2x + 3| = -5$

  c) $|3 - x| \leq 2$

  d) $|2x + 5| > 7$

- TPC: Cap2. Ex 1 c g j p

Propriedades do módulo (cont.): $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

5) $|xy| = |x|.|y|$

6) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, se $y \neq 0$

7) $|x^n| = |x|^n, \quad n \in \mathbb{N}$

8) $|-x| = |x|$

9) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

2.2. Intervalos; supremo, ínfimo, máximo e mínimo de um conjunto; conjuntos limitados (revisões).

- Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$.

Intervalo entre a e b é o conjunto de todos os números reais compreendidos entre a e b.

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$	(intervalo aberto)	$(a, b) =]a, b[$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$	(intervalo fechado)	
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$	(fechado em a e aberto em b)	$[a, b) = [a, b[$
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$	(aberto em a e fechado em b)	$(a, b] =]a, b]$
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$		$[a, +\infty) = [a, +\infty[$
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$		$(-\infty, b) =]-\infty, b[$

- Def: Seja $K \subset \mathbb{R}$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}$.
  b é um **majorante** de K se e só se $\forall x \in K,\ x \leq b$.
  a é um **minorante** de K sse $\forall x \in K,\ x \geq a$.
  K é **majorado** (ou **limitado superiormente**) sse K tiver majorantes.
  K é **minorado** (ou **limitado inferiormente**) sse K tiver minorantes.
  K é um conjunto **limitado** sse K for majorado e minorado; senão K diz-se **ilimitado**.

- Ex.1. $A =]-1,3[\cup \{5\}$
  $\{\text{majorantes de } A\} =$
  $\{\text{minorantes de } A\} =$
  A é limitado?
  Quantos elementos tem A?
  Obs: ilimitado $\neq$ infinito

- Ex.2. $B = [2, +\infty)$
  $\{\text{majorantes de } B\} =$
  $\{\text{minorantes de } B\} =$
  B é limitado?

- Ex.3. $C = \emptyset$
  $\{\text{majorantes de } C\} =$
  $\{\text{minorantes de } C\} =$
  C é limitado?

- Def (cont.) (Seja $K \subset \mathbb{R}$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}$)
  supremo de K, $\sup(K)$, é o menor dos majorantes, caso exista;
  ínfimo de K, $\inf(K)$, é o maior dos minorantes, caso exista;
  máximo de K, $\max(K)$, é o $\sup(K)$, se este pertencer ao conjunto K;
  mínimo de K, $min(K)$, é o $\inf(K)$, se este pertencer ao conjunto K.

- Ex

- **TPC**: cap2. 6a, 5acdg (só o que já demos), 2

- Questão1: Dados 2 números reais a e b, qual a interpretação de $|a - b|$?
  (sugestão, pense na representação de a, de b e de $|a - b|$ na reta real)

- Questão 2: Seja $A = \{x \in \mathbb{R}: |x - 1| < 5\}$. Que conjunto é este?
  (resolva primeiro a questão1)

2.3 Noções topológicas

- Dados $a, b \in \mathbb{R}$, a **distância** de b a a é $d(b,a) = |b-a|$.
  Assim, $|x-a| =$ distância de x a a.

- Obs: $d(a,b) = d(b,a)$

- Def: Seja $a \in \mathbb{R}$.
  Vizinhança de centro a e raio ε, $V_\varepsilon(a)$, é o conjunto de todos os pontos reais x cuja distância a a é menor do que ε, ou seja
  $$\begin{aligned} V_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R}:\ d(x,a) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}:\ |x-a| < \varepsilon\} \\ &=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\end{aligned}$$

- Def: Sejam $K \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então,
  a é um **ponto interior** de K se existe uma vizinhança de a contida em K, isto é,
  $$\text{se } \exists \varepsilon > 0:\ V_\varepsilon(a) \subset K\ ;$$
  a é um **ponto exterior** de K se existe uma vizinhança de a sem pontos de K, isto é,
  $$\text{se } \exists \varepsilon > 0:\ V_\varepsilon(a) \subset K^c\ ;$$
  a é um **ponto fronteiro** de K se qualquer vizinhança de a tem pontos de K e de K^c, isto é,
  $$\text{se } \forall \varepsilon > 0:\ V_\varepsilon(a) \cap K \neq \emptyset\ \wedge\ V_\varepsilon(a) \cap K^c \neq \emptyset\,.$$

  interior de K, $int(K)$, é o conjunto de todos os pontos interiores de K;
  exterior de K, $ext(K)$, é o conjunto de todos os pontos exteriores de K;
  fronteira de K, $fr(K)$, é o conjunto de todos os pontos fronteiros de K;
  aderência ou fecho **de** K é $ad(K) = int(K) \cup fr(K)$;

- Ex: $A = [1,4[$

- Def (cont)

  K é **aberto** se $int(K) = K$;

  K é **fechado** se $ad(K) = K$;

  K é **compacto** se for limitado e fechado.

- Ex.1. $A =]-1,3[\cup \{5\}$

- Ex.2. $B = [2, +\infty)$

- Ex.3. $C =]-1,3[$

- Ex.4. $D = \mathbb{N}$

- Ex.5. $E = \mathbb{R}$

- Obs:

  Sendo $K \subset \mathbb{R}$,

  1) $int(K), fr(K)$ e $ext(K)$ formam uma partição de $\mathbb{R}$, ou seja

     i) são disjuntos 2 a 2 e

     ii) $int(K) \cup fr(K) \cup ext(K) = \mathbb{R}$

  2) $int(K) = ext(K^c)$ e portanto $ext(K) = int(K^c)$.

     $fr(K) = fr(K^c)$.

- Def: Sejam $K \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$.

  a é **ponto de acumulação** de K se

  em qualquer vizinhança de a existir pelo menos um ponto de K diferente de a

  (ou seja, $\forall \varepsilon > 0,\ V_\varepsilon(a) \cap (K\backslash\{a\}) \neq \emptyset$),

  ou ainda, se em qualquer vizinhança de a existirem infinitos pontos de K.

  derivado de K, K', é o conjunto dos pontos de acumulação de K.

- Exemplos 1, 2 e 4

- Nota: um ponto $a \in K$ que não é ponto de acumulação, é ponto isolado.

- Exemplos

  variantes do exemplo 1 (slide 10)

  $\mathrm{F} = A \cap \mathbb{Q}$ (Ex.1. $A =]-1,3[\cup \{5\}$)

  ($\mathrm{G} = \mathrm{A} \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$)

- Um conjunto singular é fechado?

- TPC: Cap2: ex 6b,
  ex 5acdg (acabar)
  ex 3, 4