Gestão do Desporto

Matemática I

2019/2020

Capítulo 1

1. Revisão de Lógica Matemática e de Teoria de Conjuntos

1. Revisão de Lógica Matemática e de Teoria de Conjuntos

- Em qualquer linguagem há
  - palavras
  - frases
  - gramática
  - ...

- É preciso conhecer a linguagem correta para nos entendermos.

- **Objectivo:** Interpretar e usar a linguagem matemática.

1.1. Introdução à Lógica Matemática

1.1.1. Designações e Proposições

DEFINIÇÃO – Designação (Nome / Termo)

Designação é qualquer expressão que indica um determinado objecto (matemático ou não).

- **Ex. 1:** Quais das seguintes expressões são designações?

a) lápis de carvão	b) π	c) $\frac{3}{\text{Paula}}$	d) $2-5$
e) $2 <$	f) $\mathbb{N}$	g) $\mathbb{N}_0$	h) $\mathbb{Z}$
i) $\mathbb{Q}$	j) $\mathbb{R}$	k) $\mathbb{C}$	

- **Obs:** 1) Não se pode atribuir um valor lógico (V/F) a uma designação.
  2) Numa designação não há variáveis.

DEFINIÇÃO – Designações Equivalentes

Duas designações, a e b, são **equivalentes** se indicarem o mesmo objecto.
Escreve-se: $a = b$.

- **Ex. 2:** As designações 1 e $\frac{2+4}{6}$ são equivalentes?

DEFINIÇÃO – Proposição e Valor Lógico

Uma **proposição** p é qualquer afirmação sobre determinado objecto, e que pode ser verdadeira (V) ou falsa (F).
Os atributos V/F são os **valores lógicos** da proposição.

- **Ex. 3:** Proposição? Valor Lógico?

  a) $6 = 8 - 2$
  b) $3 \geq$
  c) $3 \geq 3$
  d) $\mathbb{Z} \supset \mathbb{R}$
  e) $0 \in \mathbb{N}$

- **Obs:** Numa proposição não há variáveis!

DEFINIÇÃO – Proposições Equivalentes

Duas proposições, p e q, são **equivalentes** se ambas tiverem o mesmo valor lógico.
Escreve-se: $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$; e lê-se: "***p* é equivalente a *q***".

- **Ex. 4:** Quais dos seguintes pares de proposições são equivalentes?

  a) $6 = 8 - 2$ e $6 = 6$
  b) $3 \geq 3$ e $3^2 = -3^2$
  c) $0 \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \supset \mathbb{R}$

1.1.2. Álgebra Proposicional (operações com proposições) e Propriedades

Vamos conjugar proposições de maneira a criar novas proposições utilizando as seguintes operações lógicas:

Operação	*Escreve-se*	*Lê-se*
Negação	$\sim p$	não p
Conjunção	$p \wedge q$	p e q
Disjunção	$p \vee q$	p ou q
Implicação	$p \Rightarrow q$	• p implica q • se p então q • p é condição suficiente para q • q é condição necessária para p
Equivalência	$p \Leftrightarrow q$	• p é equivalente a q • p se e só se q • p é condição necessária e suficiente para q

Para obter o valor lógico das novas proposições resultantes da aplicação das operações lógicas podemos utilizar **Tabelas de Verdade**:

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Prioridades das Operações Lógicas

A menos da utilização de parênteses, obedece-se à seguinte hierarquia das operações lógicas:

1º) $\sim$

2º) $\wedge$, $\vee$

3º) $\Rightarrow$

4º) $\Leftrightarrow$

Sejam p, q e r proposições quaisquer. Então, as operações lógicas verificam as seguintes **propriedades**:

Propriedade	*Enunciado*
Dupla Negação	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
Idempotência	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$
Comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associativa	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

(Continuação)

Propriedade	*Enunciado*
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Primeiras Leis de De Morgan	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Fórmula alternativa da implicação	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
Negação da implicação	$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$
Contra-recíproco	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$

(Continuação)

Propriedade	*Enunciado*
Dupla Implicação	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
Transitividade	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

- **TPC:** Demonstrar as propriedades.

- **Ex. 5:** Sejam as seguintes proposições: p: “2 é par” e q: “2 é negativo”.
  Aplique as operações lógicas às proposições dadas, interprete em linguagem corrente e obtenha o respectivo valor lógico.

- **Ex. 6:** Seja p uma proposição verdadeira e q uma proposição falsa. Obtenha o valor lógico das seguintes proposições:
  a) $p \vee \sim q \Rightarrow \sim p$
  b) $p \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$

- **Ex. 7:** *(Necessidade e Suficiência)* Sejam as seguintes proposições: p: “frequentar o ginásio” e q: “estar inscrito no ginásio”.
  a) Será que $p \Rightarrow q$, ou $q \Rightarrow p$?
  b) Ilustre e interprete o contra-recíproco da resposta à alínea anterior.

1.1.3. Expressões com Variáveis

A introdução de variáveis na lógica permite a generalização dos objectos e das afirmações. Por exemplo: $3x, 7 = 2x + 1$ ou $\sqrt{x}$.

Existem dois tipos de expressões com variáveis:

DEFINIÇÃO – Expressão Designatória

Uma **expressão designatória** é qualquer expressão que se converte numa designação ao substituir as variáveis por valores convenientes.

DEFINIÇÃO – Expressão Proposicional / Condição

Uma **condição** é qualquer expressão que se converte numa proposição ao substituir as variáveis por valores convenientes.

- **Ex. 8:** Classifique (designação/expressão designatória/proposição/condição):

  a) $2 + x$ b) $y > 3$ c) $x \in \mathbb{Z}$ d) $\frac{1}{y} - x + 2$ e) $0 < 0$ f) 3^2

As operações lógicas ($\sim,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$) definidas sobre as proposições, também se estendem às condições. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições quaisquer. Tem-se:

Operação	*Escreve-se*	*Significado*
Negação	$\sim p(x)$	A condição $\sim p(x)$ verifica-se quando $p(x)$ não se verificar.
Conjunção	$p(x) \wedge q(x)$	A condição $p(x) \wedge q(x)$ verifica-se apenas quando ambas $p(x)$ e $q(x)$ se verificarem.
Disjunção	$p(x) \vee q(x)$	A condição $p(x) \vee q(x)$ verifica-se quando pelo menos uma, $p(x)$ ou $q(x)$, se verificar.
Implicação	$p(x) \Rightarrow q(x)$	A condição $p(x) \Rightarrow q(x)$ verifica-se se sempre que $p(x)$ se verificar, $q(x)$ também se verificar.
Equivalência	$p(x) \Leftrightarrow q(x)$	A condição $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ verifica-se se sempre que $p(x)$ se verificar, $q(x)$ também se verificar, e vice-versa.

- **Ex. 9:** Estabeleça equivalências ou implicações ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow$) entre as seguintes condições:

  a) $x > 3 \vee x = 3$ ____ $x \geq 3$
  b) $\sim(x > 1)$ _____ $x \leq 1$
  c) $\sim(x > 1)$ _____ $x < 1$
  d) $x^2 > 0$ _____ $x \neq 0$
  e) $x > 3$ _____ $x > -1$
  f) $x < 0$ _____ $x + 2 < 0$

1.1.4. Quantificadores

Uma condição pode ser transformada numa proposição através de duas formas:

- substituindo as variáveis na expressão por valores;
  ou
- introduzindo quantificadores para generalizá-la ou especificá-la:

Quantificador Universal	*Quantificador Existencial*
$\forall$ Lê-se: • "qualquer que seja" • "para todo"	$\exists$ Lê-se: • "existe pelo menos um" • "para algum"

Em particular, seja $p(x)$ uma condição. Então:

Notação	*Lê-se*
$\forall x, p(x)$	"qualquer que seja x, tem-se $p(x)$" "para todo o x, tem-se $p(x)$"
$\exists x: p(x)$	"existe pelo menos um x tal que $p(x)$" "para algum x, tem-se $p(x)$"
$\exists^1 x: p(x)$	"existe um e um só x tal que $p(x)$" "para um só x, tem-se $p(x)$"

- **Ex. 10:** Seja a condição $x > 3$. Interprete as seguintes proposições:

  a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3$

  b) $\exists x \in \mathbb{R}:\ x > 3$

- **Ex. 11:** Indique o valor lógico das seguintes proposições:

  a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$

  b) $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 \leq 0$

  c) $\exists x \in \mathbb{N}:\ x^2 \leq 0$

  d) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - 3 = 0$

  e) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

  f) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}:\ y < x$

  g) $\exists y \in \mathbb{R}:\ \forall x \in \mathbb{R},\ y < x$

- **Obs:** A troca de quantificadores de tipo diferente resulta numa outra proposição que não é equivalente à original (veja-se f) e g) do Ex. 11).

  Aos quantificadores do mesmo tipo pode trocar-se a ordem sem alterar o valor lógico da proposição original.

Negação de um quantificador – Segundas Leis de De Morgan

Seja $p(x)$ uma condição. Então:

$$\sim\big(\forall x, p(x)\big) \Leftrightarrow \exists x: \sim p(x)$$

$$\sim\big(\exists x: p(x)\big) \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$$

- **Ex. 12:** Negar f) e g) do Ex. 11 (slide anterior).

- **Ex. 13:** Indique o valor lógico das seguintes proposições e negue-as.

  a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$

  b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}:\ x + y = 3$

1.2. Breve Introdução à Teoria dos Conjuntos

1.2.1. Conceitos Básicos

DEFINIÇÃO – Conjunto e Elementos

Um **conjunto** é uma colecção de objectos bem definidos.
Os conjuntos são representados com letras maiúsculas: $A, B, C, \ldots$

Os objectos de um conjunto designam-se por **elementos.**
Em geral, os elementos de um conjuntos representam-se com letras minúsculas: $a, b, c, \ldots$

Um conjunto pode ser formalizado de duas maneiras:

- Listando os seus elementos: $\{a, b, c, d, e, \ldots\}$
- Através de uma condição: $\{x: p(x)\}$

- **Obs:** Um conjunto que tem apenas um elemento designa-se por **conjunto singular**.
  Por exemplo, o conjunto $\{0\}$ é singular.

Por exemplo: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ são os conjuntos dos números naturais, inteiros e reais, respectivamente.

- **Ex. 14:** Seja A o conjunto dos números pares menores que 10. Formalize este conjunto usando duas notações distintas.

Relações de pertença

Se um objecto a é elemento de um conjunto A, escreve-se: $a \in A$, e lê-se: "a pertence a A".

Se um objecto b não é elemento de um conjunto A, escreve-se: $b \notin A$, e lê-se: "b não pertence a A".

- **Ex. 15:** Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x < 10\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 10\}$.

  Refira um elemento e um não elemento de cada um dos conjuntos anteriores.

DEFINIÇÃO – Igualdade de Conjuntos

Dois conjuntos, A e B, são **iguais** se ambos tiverem os mesmos elementos. Escreve-se: $A = B$.

- **Ex. 16:** Os conjuntos $\{x:\ x \in \mathbb{N}\ \wedge\ x \leq 5\}$ e $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ são iguais?

- **Obs:** A repetição de elementos de um conjunto não é relevante. Por exemplo, os conjuntos $\{0, 1\}$ e $\{0, 1, 0, 1, 0\}$ são iguais porque ambos têm os mesmos elementos, que são o número 0 e o número 1. Logo, $\{0, 1\} = \{0, 1, 0, 1, 0\}$.

- **Obs:** A ordem dos elementos de um conjunto não é relevante. Por exemplo, os conjuntos $\{x, y, z\}$ e $\{y, z, x\}$ são iguais porque ambos têm os mesmos elementos. Ou seja, a troca da ordem dos elementos não gera um conjunto diferente. Logo, $\{x, y, z\} = \{y, z, x\}$. Contudo, uma vez que (x, y, z) representa um terno *ordenado*, então $(x, y, z) \neq (y, z, x)$.

DEFINIÇÃO – Subconjunto

Sejam A e B dois conjuntos. Se todo o elemento de A é também elemento de B, então diz-se que A é um **subconjunto** de B e escreve-se: $A \subset B$ ou $B \supset A$. Formalizando,

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

- **Obs:** Se um conjunto A não está contido num conjunto B, então é porque existe algum elemento de A que não é elemento de B. Escreve-se: $A \not\subset B$. Para formalizar matematicamente, basta negar a proposição $A \subset B$, isto é:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \sim(A \subset B) \Leftrightarrow \sim(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \exists x: x \in A \land x \notin B$$

- **Obs:** O facto de um conjunto A ser subconjunto de outro conjunto B, permite que A possa ser igual a B, pois se $A = B$ então qualquer elemento de A é também elemento de B. Contudo, se $A \subset B$, mas $A \neq B$ diz-se que A é um **subconjunto próprio** de B.

- **Propriedade:** Para dois conjuntos iguais, $A = B$, qualquer elemento de A é elemento de B, e também qualquer elemento de B é elemento de A. Logo, conclui-se que:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \land B \subset A$$

- **Ex. 17:** Escreva as relações de inclusão entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

- **Ex. 18:** Considere os seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z}:\ 0 \leq x \leq 1\}$
$C = \{x \in \mathbb{Z}:\ -1 \leq x \leq 1\}$

Estabeleça duas relações de inclusão e duas relações de não inclusão para os conjuntos anteriores.

DEFINIÇÃO – Conjunto Universal / Universo

O **conjunto universal** é o conjunto fixo que contém todos os objectos possíveis num determinado estudo. Representa-se por U.

- **Propriedade:** Todo o conjunto é subconjunto do conjunto universal, isto é: $\forall A,\ A \subset U$.
- **Obs:** O conjunto universal é previamente fixado, ficando ao nosso critério mas englobando todos os objectos relevantes para o estudo.
  Alguns exemplos são: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}$, etc.

DEFINIÇÃO – Conjunto Vazio

O **conjunto vazio** é o conjunto que não contém qualquer elemento. Representa-se por: $\emptyset$.

- **Propriedade:** O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, isto é: $\forall A,\ \emptyset \subset A$.
- **Ex. 19:** O conjunto $\{x \in \mathbb{N}: 0 < x < 1\}$ tem algum elemento?

- **Obs:** elemento $\in$ / $\notin$ conjunto
  conjunto $\subset$ / $\supset$ / $\not\subset$ / $\not\supset$ / $=$ conjunto

- **Ex. 20:** Indique quais das seguintes proposições são verdadeiras:
  a) $1 \in \{1\}$
  b) $1 \subset \{1\}$
  c) $1 \notin \{2\}$
  d) $\{1\} \in \{1,2,3\}$
  e) $\{1,2,3\} \supset \{2,3\}$
  f) $1 \in \{1, \{2,3\}\}$
  g) $\{2,3\} \in \{1, \{2,3\}\}$
  h) $\emptyset = \{x:\ x \in \mathbb{N} \wedge x = x + 1\}$

1.2.2. Operações Fundamentais com Conjuntos e Propriedades

Sejam A e B dois conjuntos num universo U, isto é: $A, B \subset U$, tais que:

$$A = \{x \in U\colon\ p(x)\}$$
$$B = \{x \in U\colon\ q(x)\}$$

As principais operações com conjuntos são as seguintes:

Operação	*Escreve-se*	*Lê-se*	*Significado*
Intersecção	$A \cap B$	A intersecção B	$A \cap B = \{x \in U\colon\ x \in A \wedge x \in B\}$ $= \{x \in U\colon\ p(x) \wedge q(x)\}$
(Re)união	$A \cup B$	A (re)união B	$A \cup B = \{x \in U\colon\ x \in A \vee x \in B\}$ $= \{x \in U\colon\ p(x) \vee q(x)\}$
Diferença	$A \backslash B$	A menos B (complementar de B em A)	$A \backslash B = \{x \in U\colon\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\}$ $= \{x \in U\colon\ p(x) \wedge \sim q(x)\}$

- **Ex. 21:** Sejam A e B dois conjuntos em $\mathbb{R}$ tais que: $A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon\ 2 \leq x \leq 6\}$. Obtenha:

  a) $A \cap B =$

  b) $A \cup B =$

  c) $A \backslash B =$

DEFINIÇÃO – Conjunto Complementar

Seja A um conjunto do universo U. O **complementar** de A é o conjunto resultante da diferença $U\setminus A$, e representa-se por:

$$\bar{A} = A^c = \{x \in U:\ x \notin A\}$$

- **Ex. 22:** Considere o conjunto universal $U = \mathbb{R}$. Obtenha o complementar de cada um dos seguintes conjuntos:

  a) $A = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 3\}$

  b) $B = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \leq x \leq 1\}$.

DEFINIÇÃO – Conjuntos Disjuntos

Dois conjuntos, A e B, dizem-se disjuntos se $A \cap B = \emptyset$

- **Ex. 23:** Os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}:\ 0 \leq x \leq 1\}$ são disjuntos?

Sejam A, B e C conjuntos de um universo U. Então, as operações sobre conjuntos verificam as seguintes **propriedades**:

Propriedade	*Enunciado*
Idempotência	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Comutativa	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Associativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(Continuação)

Propriedade	*Enunciado*
Leis de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Duplo Complementar	$\overline{(\bar{A})} = A$
Neutralidade	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$
Absorção	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup U = U$
Inclusão do complementar	$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

DEFINIÇÃO – Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O **produto cartesiano** de A por B é o conjunto de pares *ordenados*:

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\}$$

- **Obs:** $A^2 = A \times A = \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in A\}$

- **Ex. 24:** Considere os conjuntos: $A = \{-1,5\}$ e $B = \{0,1,2\}$. Obtenha:

  a) $A \times B$

  b) A^2