

# *Cálculo e Instrumentos Financeiros*

## Capitalização; Regimes; Taxas

Licenciaturas em Economia, Finanças, Gestão



## Programa

1. Capitalização / Acumulação, regimes, taxas
2. Equivalência de capitais
3. Rendas / Anuidades
  - Com termos constantes
  - Com termos variáveis
  - Diferidas
  - Perpétuas
4. Reembolso de empréstimos
5. Leasing
6. Mercado de capitais
  - Obrigações
  - Acções

## **Bibliografia**

Barroso, M.N.; Couto E. & Crespo, N. (2009). *Cálculo e Instrumentos Financeiros*, Escolar Editora, Lisboa.

# 1. Capitalização, Regimes e Taxas

- 1.1 Introdução, capitalização/acumulação, actualização
- 1.2 Regime de Juro simples
- 1.3 Regime de juro composto
- 1.4 Taxas de juro
- 1.5 Desconto simples, taxa de desconto. Relações e aplicações
- 1.6 Taxa instantânea de capitalização, força de juro









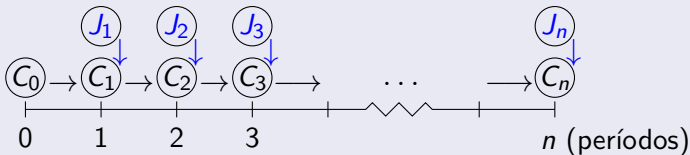




Para simplificação: Taxa  $i$  constante, tempo discreto  
 $n = 0, 1, 2, \dots$ , unidade de tempo da taxa.

## Acumulação em juro composto

Os juros vencidos vão sendo incluídos no circuito de capitalização.  
Sequência:  $C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n$ .



$$C_1 = C_0 + J_1 = C_0 + C_0 i = C_0 (1 + i)$$

$$C_2 = C_1 + J_2 = C_1 (1 + i) = C_0 (1 + i)^2$$

$$C_3 = C_2 + J_3 = P_2 (1 + i) = C_0 (1 + i)^3$$

...

$$C_n = C_{t-1} + J_t = C_{t-1} (1 + i) = C_0 (1 + i)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$



A fórmula pode generalizar-se para tempo contínuo,  $t \geq 0$ :

Expressão geral de **capitalização**,  $i_A$ : taxa efectiva

$$C_t = C_0 (1 + i_A)^t, \quad t \geq 0 \text{ (anos)};$$

$$C_n = C_0 (1 + i_A)^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_n = C_0 + \sum_{k=1}^n J_k; \quad J_k : \text{juro no período } k$$

Expressão geral de **actualização**, valor presente/actual

$$C_t = C_0 (1 + i_A)^{-t} = \frac{C_n}{(1 + i_A)^t}, \quad t \geq 0 \text{ (anos)};$$

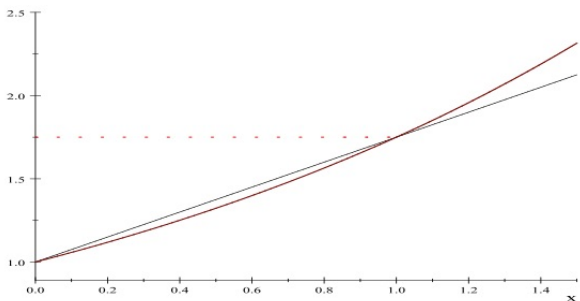
$$C_0 = C_n (1 + i_A)^{-n}$$

$$= C_n - \sum_{k=1}^n J_k; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Regime de Juro Simples vs Composto.  $i_A$ : tx. juro/unidade de tempo

- Regime Simples:  $C_t = C_0(1 + i_A t)$ ,
- Regime Composto:  $C_t = C_0(1 + i_A)^t$ ,  $t \geq 0$



É mais vantajoso aplicar um capital  $C_0$  em Regime Simples para prazos inferiores a 1 ano (período da taxa). Em Regime Composto para prazos superiores.

### Example ( $i_A = 30\%$ )

$t$ anos	R. Simples	R. Composto	dif. C-S
0	€100 000	€100 000	0
0,01	100 300	100 263	-37
0,1	103 000	102 658	-342
0,2	106 000	105 387	-613
0,4	112 000	111 065	-935
0,5	115 000	114 018	-982
1	130 000	130 000	0
2	160 000	169 000	9 000
4	220 000	285 610	65 610
10	400 000	1 378 585	978 585

Regime Simples:  $C_t = C_0(1 + i_A t)$ ,  $i$ : tx. Juro por período

Regime Composto:  $C_t = C_0(1 + i_A)^t$ ,  $t \geq 0$

- O **Regime Simples** é por vezes utilizado:
  - Em períodos de tempo inferiores ao ano, fracções do ano;
  - Transacções financeiras de curto prazo
- Um **Regime Misto** poderia ser usado:
  - O Regime Composto para períodos inteiros e
  - O Regime Simples para fracções do período

Example (Capitalização em 4 anos 5 meses)

$$C_{4+5/12} = C_0(1 + i)^4[1 + (5/12)i].$$

Tipos/relações comuns:

**Taxas Proporcionais; Taxas Equivalentes; Taxa Efectiva; Taxa Nominal; Taxa Instantânea; Taxa de Desconto; Taxas legais.**

### Definição (Taxas proporcionais)

*Duas taxas dizem-se **proporcionais** quando, sendo de períodos diferentes, existe entre elas uma relação proporcional entre a taxa e o respectivo período.*

### Exemplo

*Uma taxa anual,  $i_A$ , é proporcional a uma taxa trimestral,  $i_T$ , quando  $i_A = 4 i_T$ . Quando uma taxa anual de 8% corresponde a uma taxa trimestral de 2% temos taxas proporcionais.*

### Definição (Taxas equivalentes)

*Duas taxas, de períodos diferentes, são **equivalentes** quando aplicadas durante o mesmo prazo e ao mesmo capital, têm igual valor acumulado (ou actualizado) .*

**Regime Simples:** taxas proporcionais são equivalentes:

$C_n = C_0 (1 + n \cdot i_A)$ . No **Regime Composto** não:

### Exemplo (Regime simples, $i_A = 5\%$ , $i_T = 1, 25\%$ )

$$100(1 + i_A) = 100(1, 05) = 100(1 + 4 i_T) = 100(1, 05) = 105$$

### Exemplo (Regime composto)

$C_0 = 1000, 00€$ , *acumulação semestral*,  $i_S = 0.05$ , *prazo 1 ano*.

*Taxa equivalente anual*,  $i_A$ :

$$1000, 00(1.05)^2 = 1102, 50€; \quad 1000, 00(1.1) = 1100, 00€$$

$$1000, 00(1 + i_A) = 1102, 50€ \Leftrightarrow i_A = 0, 1025 \longrightarrow 10, 25\%$$



## Regime composto; Fórmula geral

### Relações entre Taxas Equivalentes

Sejam duas subdivisões do ano ( $A$ ) em  $m$  e  $n$  sub períodos.

$$(1 + i_{A/m})^m = 1 + i_A \Rightarrow (1 + i_{A/m})^m = (1 + i_{A/n})^n$$
$$(1 + i_{A/n})^n = 1 + i_A$$

$$1 + i_{A/m} = (1 + i_{A/n})^{n/m} \Leftrightarrow (1 + i_{A/m})^{m/n} = 1 + i_{A/n}$$

$$i_{A/m} = (1 + i_{A/n})^{n/m} - 1$$

$$i_{A/n} = (1 + i_{A/m})^{m/n} - 1$$

## Taxas Efectivas e Taxas Nominais

Amiúde, apresentam-se aos clientes taxas proporcionais (**Taxas Nominais**) às **Taxas Efectivas**.

### Exemplo (Ex. anterior)

$C_0 = 1000,00\text{€}$ , *acumulação semestral, taxa semestral de 5%, durante 1 ano. Taxa proporcional anual 10%*.

- *Taxa nominal anual, com capitalizações semestrais: 10%;*
- *Taxas Efectivas: anual, 10,25%; semestral, 5%.*

### Definição (Taxa Nominal, $i_A^{(m)}$ )

**Taxa nominal anual com capitalizações** (*semestrais, trimestrais, mensais...*) **ou convertível ao período da aplicação** (*semestralmente, trimestralmente,...*): *Taxa proporcional anual, calculada proporcionalmente ao período de acumulação.*  
*m: N° de subdivisões do ano*

## Exemplo

Um investidor quer aplicar um capital durante um ano e fez um depósito a prazo com juros trimestrais. A taxa indicada pelo banco é de 4% ao ano com juros trimestrais. **4% é a taxa nominal (anual convertível trimestralmente)**. A taxa de juro indicada é anual mas os juros são calculados por trimestre, a uma **taxa efectiva de 1% ao trimestre**.

$$\text{Taxa Efectiva trimestral: } i_T = \frac{0,04}{4} = 0,01$$

$$\text{Taxa Nominal anual convertível ao trim.: } i_A^{(4)} = 0,04$$

$$\text{Taxa Equivalente anual: } i_A = 0,040604 = (1,01)^4 - 1$$

Seja um período (ano) subdividido em  $m$  sub-períodos de capitalização:

- $i_A^{(m)}$ : Taxa nominal anual convertível ao sub-período

Seja um período (ano) subdividido em  $m$  sub-períodos de capitalização:

- $i_A^{(m)}$ : Taxa nominal anual convertível ao sub-período
- $i = \frac{i_A^{(m)}}{m}$ : Taxa efectiva do sub-período (Ex: taxa efectiva mensal  $\rightarrow i_M = \frac{i_A^{(m)}}{12}$ ).

Seja um período (ano) subdividido em  $m$  sub-períodos de capitalização:

- $i_A^{(m)}$ : Taxa nominal anual convertível ao sub-período
- $i = \frac{i_A^{(m)}}{m}$ : Taxa efectiva do sub-período (Ex: taxa efectiva mensal  $\rightarrow i_M = \frac{i_A^{(m)}}{12}$ ).
- Equivalência  $\rightarrow 1 + i_A = \left(1 + \frac{i_A^{(m)}}{m}\right)^m$ .

## Taxa Euribor. Taxa de juro de referência

- Taxa que serve de referência (serve de índice a taxas de mercado bancário)
- **Euro Interbank Offered Rate**, divulgada por *European Banking Federation*, (às 11h CET);
- É uma taxa média de taxas praticadas por um painel de bancos, instituições mais activas no mercado monetário do Euro;
- Painel formado por um conjunto de bancos de países da UE + uns bancos internacionais (que tenham pelo menos uma sucursal num país da “zona Euro”);

Taxas *legais*: São *Taxas de Custo*, não de Juro, em geral:

- Incorporam todos os custos, duma transação de capital
- Juro: Por definição, apenas a remuneração do capital

## TAEG: Taxa Anual de Encargos Efectiva Global.

Usada nos **empréstimos ao consumo, habitação**

- Taxa incorpora todos os custos associados ao crédito
- Estes custos incluem juros e outras despesas a pagar pelo crédito.
- Expressão (Dec-lei 3259/91):

$$\sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1+t)^{y_{k'}}} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1+t)^{y_k}}$$

$A_k$  : Montante de empréstimo  $k$ ;  $A'_{k'}$ : Reembolso ou pagamento de encargos  $k$ ;  $m$ : nº de empréstimo;  $m'$ —nº de reembolsos/encargos;  $y_k$ — anos do empréstimo  $k$ ;  $y_{k'}$ —anos dos reembolsos/encargos  $k'$ ;  $t$ —TAEG.



**Exemplo (Ex.5.2)**

*Empréstimo ao consumo de 4500,00€, prazo 9 meses. Liquidação total na data de vencimento: capital em dívida, juros em Regime Simples à taxa anual de 9,2%. Encargos: admin. 45,00€, gestão 18,25€, despesas de reembolso 8,45€, Imposto 4% .*

- Cálculo de  $C_n$ , valor da dívida final:

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 + (J + IS) + EA + EG + DR \\ &= 4500 + 4500 \times \frac{9}{12} \times 0,092(1 + 0.04) + 45 + 18,25 \\ &\quad + 8,45 = 4894,62\text{€} \end{aligned}$$

- **TAEG**,  $i_{TAEG}$ :

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 (1 + i_{TAEG})^n = 4500 (1 + i_{TAEG})^{9/12} \\ i_{TAEG} &= 11,86\% \implies \text{TAEG} : 11,86\% \end{aligned}$$

**TAE:** Taxa Anual Efectiva.

Taxa semelhante à *TAEG*, mas exclui imposto.

**TAE:** Expressão (Dec-lei 220/94):

$$\sum_{k'=1}^{m'} \frac{R_k}{(1+r)^{y_k}} = \sum_{q=1}^p \frac{D_q}{(1+r)^{y_q}}$$

$m$ —nº de recebimentos do cliente;  $R_k$ —recebimento  $k$ ;  $y_{k'}$ —prazo (dias) do recebimento  $k$ ;  $p$ —nº de pagamentos do cliente;  $D_q$ —valor do pagamento  $q$ ;  $y_{q'}$ —prazo (dias) do pagamento  $q$ ;  $r$ —*TAE*.

Exemplo (**Ex.5.2 (cont.)**)

Cálculo do novo  $C'_n = C_n - IS = 4894,62 - 12,42 = 4882,20$ .

$$4882,20 = 4500 (1 + i_{TAE})^{9/12} \iff i_{TAE} \simeq 11,48\%$$





## Taxa de juro e taxa de desconto, mesmo período de referência

- **Taxa de Desconto,  $d$ :**

$$d = \frac{\text{desconto}}{\text{v. final}} = \frac{C_1 - C_0}{C_1} \Leftrightarrow C_0 = C_1 (1 - d)$$

- **Taxa de Juro,  $i$ :**

$$i = \frac{\text{desconto}}{\text{v. inicial}} = \frac{C_1 - C_0}{C_0} \Leftrightarrow C_0 = C_1 (1 + i)^{-1}$$

- $\Rightarrow C_1 (1 - d) = C_1 (1 + i)^{-1}$



$$d = \frac{i}{1 + i} \Leftrightarrow i = \frac{d}{1 - d};$$



$$d = \frac{C_1 - C_0}{C_1} \text{ e } i = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$$

## Desconto por dentro; Desconto por fora

- Associado ao **Regime de Juro Simples**, taxas proporcionais.
- Procedimentos aplicados em operações de curto prazo (e.g. letras comerciais, *com juro à cabeça*)
- A *remuneração* tem por base o capital final, verdadeiramente, aplica-se uma **taxa de desconto**:  $d$ .

### Modalidades: Desconto por dentro ( $D_d$ ); Desconto por fora ( $D_f$ )

- $D_f$ : Corresponde ao desconto simples atrás tratado;
- $D_d$ : Matematicamente corresponde ao equivalente de juro simples mas calculado sobre a quantia líquida inicial  $C_0$ . De outra forma, pagamento do desconto actualizado ao início do período. A taxa de actualização é a própria  $d$ , tal como foi definida anteriormente. Na prática corresponde a uma taxa  $d'$  sobre  $C_1$ :

$$C_1 d' = C_1 \frac{d}{(1 + d)} .$$

Desconto por dentro ( $D_d$ ), Desconto por fora ( $D_f$ ):

$$D_d = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_d; \quad D_f = C_1 - C_0 \Leftrightarrow C_1 = C_0 + D_f.$$

- A remuneração é o **desconto**. Recebe emprestado  $C_0$  e devolve  $C_1$ :

$$D_d = C_1 d' = C_1 \times \frac{d}{1+d}; \quad D_f = C_1 \times d.$$

- Em  $D_d$  é a taxa sobre  $C_1$  é actualizada, em  $D_f$  não é.
- No **Desconto por Dentro**,

$$C_0 = C_1 - C_1 \frac{d}{1+d} = C_1 \left( \frac{1}{1+d} \right) \Leftrightarrow C_0(1+d) = C_1$$

- $C_0(1+d) = C_1$ , ou seja  $d$  na realidade é equivalente matematicamente a *taxa de juro de capitalização* sobre a quantia líquida inicial  $C_0$ .
- No  $D_d$  temos  $d = i$ . No  $D_f$  temos  $i > d$ .

## Exemplo (Ex 1.5)

O Sr. Henrique aceitou uma letra €20 000 por conta de dívida que vence daqui a 3 meses. Descontou ( $D_d$ ) a letra junto do Banco a uma taxa de 15% ao trimestre, juros à cabeça. Na data de vencimento a dívida vale  $C_1 = 20\,000$ , o banco só creditou  $C_0 = 17\,391,3$ , descontou  $D_d = 20\,000 - 17\,391,3 = 2\,608.7$  no momento 0:

$$(1 + i)C_0 = C_1 \Leftrightarrow C_0 = 20000/1,15 = 17\,391,3$$

$$D_d = 20\,000 - 17\,391,3 = 2\,608.7 \rightarrow 17391 \times 1.15 = 20\,000$$

**No Desconto por dentro,  $d = i$ . Em Desconto por fora:**

$$D_f = 20000 \times 0.15 = 3000 \Rightarrow C_0 = 20000 - 3000 = 17000$$

$$20000 = 17000(1 + i) \Leftrightarrow i = 0,17647 \Rightarrow 17,65\%$$

A taxa de juro é 17,65% e a taxa de desconto é 15%



## Definição (Letra de câmbio)

*Título de crédito pelo qual o sacador dá ordem ao sacado, ou ao avalista em caso de incumprimento, para pagar determinada quantia ao legítimo portador no **vencimento**.*

### Agentes:

- **sacador**: credor;
- **sacado**: devedor;
- **tomador** ou **endossado**: possuidor do título, podem ser transferidas (endossadas);
- **avalista**: substitui o devedor em caso de incumprimento.

















