

Cálculo e Instrumentos Financeiros

Equivalência de Capitais

Licenciaturas em Economia, Finanças, Gestão

2. Equivalência de Capitais

2.1 Equação do valor

2.2 Capital comum e vencimentos

2.3 Taxa interna de capitalização;

2.3 Taxas médias

Capitais Equivalentes

Dois capitais são equivalentes se, reportados à mesma data, apresentarem valores iguais.

Data de Referência

Data de reporte do valor de dois ou mais capitais. (Data de efectuação dos cálculos, actualizando e/ou capitalizando).

Equação do Valor ou de Equivalência

Equação que permite estabelecer a igualdade entre os capitais.

- Em regime composto ou simples. Em regime composto, a data de referência não tem influência na equivalência dos capitais. Relevante são: **datas de vencimento** dos capitais, **valores** e **taxas de juro**.

Valor de um conjunto de capitais

Valor que assumem num momento de referência.

Exemplo (Ex 2.1)

Seja uma uma dívida de €100 000,00 com data de pagamento daqui a um ano. Proposta alternativa: pagamento de €92.000,00 hoje.

- Considerando uma taxa de 10% ao ano, será que estes dois valores são equivalentes? (Regime composto).

$$C_0 = 100000(1 + 0,10)^{-1} = 90909,09\text{€} \neq 92000\text{€}$$

Conclusão: à taxa de 10% não são equivalentes.

- Haverá uma taxa para a qual os 2 capitais sejam equivalentes?

$$92000 = 100000(1 + i_A)^{-1} \Leftrightarrow (1 + i_A)^1 = 100000/92000$$

$$i_A = 0,086957 \implies 8,6957\%$$

Exemplo (Ex 2.2)

Empresa $\sigma\alpha$ tem a pagar dentro de um ano €2 200,00.

Alternativa: Pagar hoje €2 000,00. Taxa de 12%.

- ① Actualizar 2200,00 para hoje (data de referência):

$$C_0 = 2200,00(1 + 0,12)^{-1} = 1964,29\text{€} < 2000,00\text{€}$$

- ② Capitalizar à data de referência, daqui a 1 ano:

$$C_1 = 2000,00(1 + 0,12) = 2240,00 > 2200,00\text{€}.$$

Os 2 capitais não são equivalentes... Opção: **pagar daqui a 1 ano!** Considere agora taxa de 10%:

① $C_0 = 2200,00(1 + 0,1)^{-1} = 2000,00\text{€}$

② $C_1 = 2000,00(1 + 0,1) = 2200,00\text{€}$

Os capitais assim são equivalentes. E se a taxa for menor? (A escolha da taxa adequada é fundamental).

Definição (Capital comum)

Chama-se **capital comum** à soma de um determinado conjunto de capitais, referidos a momentos distintos, actualizados (ou capitalizados) para um **momento comum** (ou seja, a data de **vencimento comum**). (Muitas vezes é o momento presente)

Exemplo (Ex 2.5)

- A Sociedade Betalfa tem a receber da família Silva três quantias, que incluem capital e juros, estes calculados à taxa de juro de 8% ao ano, nas seguintes datas:
 - 1 $k_1 = 1000\text{€}$ daqui a 6 meses; $n_1 = 1/2$
 - 2 $k_2 = 2000\text{€}$ daqui a 18 meses; $n_2 = 3/2 = 1\frac{1}{2}$
 - 3 $k_3 = 3000\text{€}$ daqui a 21 meses; $n_3 = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.
- Qual é o valor destes três capitais na data actual, ou seja, qual o valor da dívida actualmente? Ou... Se o devedor pretender liquidar já, hoje, a totalidade da dívida, quanto deverá pagar?

Exemplo (Ex 2.5. Regime composto, cont.)

① Valor presente ou actual

$$k_{1;0} = \frac{1000}{1,08^{1/2}} = 962,25; \quad k_{2;0} = \frac{2000}{1,08^{3/2}} = 1781,95$$

$$k_{3;0} = 3000(1,08)^{-7/4} = 2621,98\text{€}$$

② Capital comum: $CC_0 = k_{1;0} + k_{2;0} + k_{3;0} = 5366,18\text{€}$ ③ Se o devedor pretender pagar a dívida de uma só vez, entregando a quantia única de $k = 7000\text{€}$, em que data deverá fazê-lo? (Um) **Vencimento comum**, n :

$$\begin{aligned} k_1(1+i)^{-n_1} + k_2(1+i)^{-n_2} + k_3(1+i)^{-n_3} &= k(1+i)^{-n} \\ 1(1,08)^{-0,5} + 2(1,08)^{-1,5} + 3(1,08)^{-1,75} &= 7(1,08)^{-n} \\ -n \ln 1,08 &= \ln(0,766597) \\ n &= 3,453621 \end{aligned}$$

Resposta: 3 anos, 5 meses e 13 dias

Definição (Vencimento médio)

O **vencimento médio** (caso particular do vencimento comum) é um prazo médio das dívidas ou aplicações (em juro composto), i.e., é o prazo t para qual o capital comum (numa pré-fixada data de referência) é igual à soma dos valores nominais dos vários m capitais, k_1, k_2, \dots, k_m , reportada à data de referência. Seja, a data de referência no momento 0:

$$t : k(1+i)^{-t} = (k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m) (1+i)^{-t} = CC_0$$

Exemplo (Ex 2.5)

Reportemos todos os capitais à data de referência, momento 0:

$$k_1 = 1000; k_2 = 2000; k_3 = 3000; k = 6000$$

$$6000(1,08)^{-t} = 1000(1,08)^{-0,5} + 2000(1,08)^{-1,5} + 3000(1,08)^{-1,75}$$

$$6000(1,08)^{-t} = 5366,18\text{€}$$

$$t = 1,450651 \text{ anos} \longrightarrow 1 \text{ ano, 5 meses e 12 dias}$$

Definição (Taxa interna de capitalização [TIC])

Taxa de juro que permite equivaler um Capital Comum, a outro ou vários capitais, reportando a determinada data (à escolha).

Exemplo (Ex 2.6)

As seguintes quantias vencem: **1.** $k_1 = 2000€$ daqui a 1 ano; **2.** $k_2 = 3000€$ daqui a 2 anos; **3.** $k_3 = 5000€$ daqui a 3 anos
O contrato foi renegociado e o devedor acordou pagar uma só quantia de $9.000€$ daqui a 6 meses. Qual a taxa?

$$2(1 + i_A)^{-1} + 3(1 + i_A)^{-2} + 5(1 + i_A)^{-3} = 9(1 + i_A)^{-1/2}$$

$$2v^1 + 3v^2 + 5v^3 = 9v^{1/2}$$

$$2(1 + i)^{-1/2} + 3(1 + i)^{-3/2} + 5(1 + i)^{-5/2} = 9$$

Resposta: $i \simeq 0.0609 \Rightarrow 6,09\%$ aprox. Resolução ou com calculadora (por tentativas), ou software: Excel-função **IRR/TIR**.

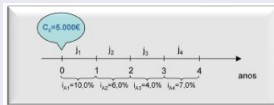
Definição (Taxa média de um só capital)

A taxa que, aplicada a um capital, produz o mesmo valor (acumulado ou actualizado) que diversas taxas aplicadas ao mesmo capital, durante igual período de tempo.

Exemplo (Ex 2.7 (R. Juro Simples))

A empresa α - κ aplicou €5 000,00 durante 4 anos, às taxas:

$$\begin{aligned} i_{A1} &= 10\%; & i_{A3} &= 4\%; \\ i_{A2} &= 6\%; & i_{A4} &= 7\%. \end{aligned}$$



Determine qual a taxa média equivalente a estas quatro taxas.

$$\text{Juro total: } \sum_{k=1}^4 j_k = 5000 \sum_{k=1}^4 i_{A,k} = 1350.$$

$$\text{J. médio: } \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 j_k = 337,50\text{€}$$

$$\text{Tx. média anual: } \bar{i}_A = \frac{337,50}{5000} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i_{A,k} = 0,0675 \Rightarrow 6,75\%.$$

$$\text{Alternativa, média aritmética das taxas: } \frac{10\%+4\%+6\%+7\%}{4} = 6,75\%.$$

Exemplo (Ex 2.8 (R. Juro Composto))*Exemplo anterior com juro composto*

$$\begin{aligned}
 C_4 &= C_0(1 + i_{A_1}) \cdot (1 + i_{A_2}) \cdot (1 + i_{A_3}) \cdot (1 + i_{A_4}) \\
 &= 5000(1 + 0,1)(1 + 0,06)(1 + 0,04)(1 + 0,07) = 6487,62\text{€}
 \end{aligned}$$

Equação

$$\begin{aligned}
 C_0 \cdot (1 + \bar{i}_A)^4 &= C_0(1 + i_{A_1}) \cdot (1 + i_{A_2}) \cdot (1 + i_{A_3}) \cdot (1 + i_{A_4}) \\
 (1 + \bar{i}_A)^{1/4} &= (1 + i_{A_1}) \cdot (1 + i_{A_2}) \cdot (1 + i_{A_3}) \cdot (1 + i_{A_4}) \\
 C_4 &= C_0 \cdot (1 + \bar{i}_A)^4 \Leftrightarrow 6487,62 = 5000(1 + \bar{i}_A)^4 \\
 \bar{i}_A &= 0,067281 \implies \simeq 6,73\%
 \end{aligned}$$

A taxa média resulta da média geométrica dos factores de capitalização anuais:

$$(1 + \bar{i}_A) = \sqrt[4]{(1 + 0,1)(1 + 0,06)(1 + 0,04)(1 + 0,07)}$$

Taxa média de um só capital. Juro simples

Média aritmética (simples) das taxas anuais:

$$\bar{i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n i_{A,k}, \quad \text{e verifica-se} \quad C_n = C_0 (1 + \bar{i}_A n).$$

(**NB:** **Média ponderada** se os períodos de capitalização de cada taxa forem diferentes).

Taxa média de um só capital. Juro composto

Média geométrica das taxas anuais:

$$\prod_{k=1}^n (1 + i_{A,k}) = (1 + \bar{i}_A)^n \Leftrightarrow \left(\prod_{k=1}^n (1 + i_{A,k}) \right)^{1/n} = (1 + \bar{i}_A)$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + i_{A,k})} = (1 + \bar{i}_A), \quad \text{e verifica-se} \quad C_n = C_0 (1 + \bar{i})^n.$$

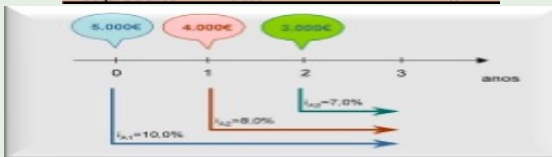
Definição (Taxa média com vários capitais)

Taxa que aplicada a vários capitais, obtém um capital comum igual ao que seria obtido usando as diversas taxas aos respectivos capitais?

Example (Ex. 2.9, R. Juro Simples)

A empresa $k\alpha$, Lda, pretende efectuar as aplicações nas datas e taxas abaixo. Calcule C_3 .

Momento de Aplicação	Capital C_x	Prazo n_x	Taxa anual i_x
Hoje	5 000	3	10%
Daqui a 1 ano	4 000	2	8%
Daqui a 2 anos	3 000	1	7%



Example (Ex. 2.9, R. Juro Simples, Empresa *Capalfa, Lda* [cont.])

$$\begin{aligned} C_3 &= 5000(1 + 3 \times 0,1) + 4000(1 + 2 \times 0,08) \\ &\quad + 3000(1 + 1 \times 0,07) \\ &= 14350 \end{aligned}$$

Se aplicarmos todos os capitais à mesma taxa, para obter igual valor C_3 :

$$\begin{aligned} 14350\text{€} &= 5000(1 + 3\bar{i}) + 4000(1 + 2\bar{i}) + 3000(1 + 1\bar{i}) \\ \bar{i} &= 9.0385 \times 10^{-2} \Rightarrow 9.04\% \text{ aprox.} \end{aligned}$$

Fórmula geral (R.J.Simples)

$$\sum_{k=1}^n C_k(1 + n_k i_k) = \sum_{k=1}^n C_k(1 + n_k \bar{i})$$

Example (Ex. 2.10, R. J. Composto, Empresa *Capalfa, Lda* [cont.])

$$C_3 = 5.000(1,1)^3 + 4.000(1,08)^2 + 3.000(1,07) = 14\,530,60\text{€}$$

Se aplicarmos todos os capitais à mesma taxa, para obter igual valor C_3 :

$$14\,530.60 = 5000(1 + \bar{i})^3 + 4000(1 + \bar{i})^2 + 3000(1 + \bar{i})$$

$$\bar{i} = 9,1118 \times 10^{-2} \Rightarrow 9,11\% \text{ aprox.}$$

Solução: Equação do 3º grau, Função *IRR/TIR* da calculadora ou *Excel* (1 raiz real e duas complexas).

Fórmula geral (R.J.Composto)

$$\sum_{k=1}^n C_k(1 + i_k)^{n_k} = \sum_{k=1}^n C_k(1 + \bar{i})^{n_k}.$$

2. Equivalência de Capitais

2.1 Equação do valor

2.2 Capital comum e vencimentos

2.3 Taxa interna de capitalização;

2.3 Taxas médias