Gestão do Desporto

Matemática I

2019/2020

Capítulo 2

2. Números Reais

2.1. Conjuntos em $\mathbb{R}$

- ***2.1.1. Intervalos em $\mathbb{R}$***
- ***2.1.2. Valor Absoluto***
- ***2.1.3. Outros Conjuntos em $\mathbb{R}$***
- ***2.1.4. Majorantes e Minorantes; Conjunto limitado***
- ***2.1.5. Supremo e Ínfimo; Máximo e Mínimo***

2.2. Noções Topológicas em $\mathbb{R}$

- ***2.2.1. Distância e Vizinhança***
- ***2.2.2. Interior, Exterior, Fronteira e Aderência de um conjunto***
- ***2.2.3. Conjuntos Abertos, Fechados e Compactos***
- ***2.2.4. Pontos de Acumulação e Derivado de um conjunto***

2. Números Reais

2.1. Conjuntos em $\mathbb{R}$

- **Objectivo:** Estudar as principais características dos conjuntos formados por números reais.

2.1.1. Intervalos em $\mathbb{R}$

Os intervalos são dos conjuntos de números reais mais simples que se podem formar.
Existem essencialmente dois tipos de intervalos:
- Intervalos compreendidos entre dois extremos;
- Intervalos sem pelo menos um dos extremos.

DEFINIÇÃO – Intervalo entre a e b	
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Um **intervalo entre $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$** é o conjunto de todos os números reais compreendidos entre dois extremos, a e b, e que pode ser de um dos seguintes tipos:	
Intervalo fechado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x \leq b\}$
Intervalo aberto	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}:\ a < x < b\}$
Intervalo fechado em a e aberto em b	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}:\ a \leq x < b\}$
Intervalo aberto em a e fechado em b	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ a < x \leq b\}$

- **Ex. 1:** Formalize os seguintes intervalos e escreva-os com notação de conjunto:
  a) intervalo fechado entre 0 e 1
  b) intervalo aberto entre -5 e -0.5
  c) intervalo entre -1 e 3, fechado em -1 e aberto em 3
  d) intervalo entre 2.78 e 3.14, aberto em 2.78 e fechado em 3.14

DEFINIÇÃO – Intervalo ilimitado

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Um **intervalo ilimitado** é um intervalo de números reais sem pelo menos um dos extremos, e que pode ser de um dos seguintes tipos:

$$[a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geq a\}$$

$$]a, +\infty[\ = \{x \in \mathbb{R}:\ x > a\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}:\ x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[\ = \{x \in \mathbb{R}:\ x < b\}$$

$$]-\infty, +\infty[\ = \{x:\ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

- **Ex. 2:** Formalize os seguintes intervalos e escreva-os com notação de conjunto:

  a) intervalo de números reais maiores ou iguais a 1

  b) intervalo de números reais inferiores a -2

2.1.2. Valor Absoluto

O **valor absoluto** (ou **módulo**) consiste na seguinte operação sobre um número real:

DEFINIÇÃO – Valor Absoluto / Módulo

O **Valor Absoluto** ou **Módulo** de um número real, $x \in \mathbb{R}$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- **Ex. 3:** $|0| =$

  $|10.7| =$

  $|-5.4| =$

- **Propriedades do Valor Absoluto:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ e $a \geq 0$, tem-se:

1) $|x| \geq 0$
2) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$
3) $|x| \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a \vee -a \leq x < 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
4) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$
5) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
6) $|x/y| = |x|/|y|$, se $y \neq 0$
7) $|x^n| = |x|^n$, $n \in \mathbb{N}$
8) $|-x| = |x|$
9) $-|x| \leq x \leq |x|$
10) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)
11) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$ (Desigualdade Triangular Inversa)

- **Obs:** As equações e inequações com valores absolutos geram também conjuntos em $\mathbb{R}$.

- **Ex. 4:** Indique o conjunto solução (S) das seguintes condições:

a) $|2x + 3| = 2$

b) $|2x + 3| = -5$

c) $|3 - x| \leq 2$

d) $|2x + 5| > 7$

2.1.3. Outros Conjuntos em $\mathbb{R}$

Existem variadíssimos outros tipos de conjuntos de números reais que podem ser formados de maneira mais geral. Alguns exemplos são:

- $\mathbb{N}$;
- $\mathbb{Z}$;
- $\mathbb{Q}$;
- $]-1,3[\,\cup\{5\}$;
- $\{5\}$;
- $]-2,-1]\cup\{0\}\cup[1,+\infty[$;
- $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;
- etc.

2.1.4. Majorantes e Minorantes; Conjunto limitado

DEFINIÇÕES – Majorante e Minorante de um conjunto; Conjunto Limitado
Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é: $K\subset\mathbb{R}$. Sejam também $a,b\in\mathbb{R}$.
• b é um **majorante** de K se e só se: $\forall x\in K,\ x\leq b$. O conjunto de todos os majorantes de K representa-se por: $\mathbf{major}(\boldsymbol{K})$.
• a é um **minorante** de K se e só se: $\forall x\in K,\ x\geq a$. O conjunto de todos os minorantes de K representa-se por: $\mathbf{minor}(\boldsymbol{K})$.
• K é **majorado** (ou **limitado superiormente**) se e só se K tiver majorantes.
• K é **minorado** (ou **limitado inferiormente**) se e só se K tiver minorantes.
• K é um **conjunto limitado** se e só se K for majorado e minorado; caso contrário K diz-se **ilimitado**.

- **Ex. 5:** Seja $A = [0,1[$

  a) Obtenha os majorantes de A.

  b) Obtenha os minorantes de A.

  c) A é um conjunto limitado?

- **Ex. 6:** Seja $B =]-1,3[\cup \{5\}$

  a) Obtenha os majorantes de B.

  b) Obtenha os minorantes de B.

  c) B é limitado?

  d) Quantos elementos tem B?

- **Obs:** Conjunto ilimitado $\neq$ Conjunto infinito (veja-se o Ex. 6 anterior).

- **Ex. 7:** Seja $C = [2, +\infty[$

  a) Obtenha os majorantes de C.

  b) Obtenha os minorantes de C.

  c) C é limitado?

- **Ex. 8:** Seja $D =]-\infty, -3[$

  a) Obtenha os majorantes de D.

  b) Obtenha os minorantes de D.

  c) D é limitado?

2.1.5. Supremo e Ínfimo; Máximo e Mínimo

DEFINIÇÕES – Supremo e Ínfimo; Máximo e Mínimo de um conjunto
Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}$, isto é: $K \subset \mathbb{R}$.
• o **supremo** de K é o menor dos majorantes de K, caso exista. Representa-se por: $\mathbf{sup}(\boldsymbol{K})$.
• o **ínfimo** de K é o maior dos minorantes de K, caso exista. Representa-se por: $\mathbf{inf}(\boldsymbol{K})$.
• o **máximo** de K é supremo de K, caso este pertença a K. Representa-se por: $\mathbf{max}(\boldsymbol{K})$.
• o **mínimo** de K é o ínfimo de K, caso este pertença a K. Representa-se por: $\mathbf{min}(\boldsymbol{K})$.

- **Obs:** Atenção que a existência do supremo ou do ínfimo não garante a existência do máximo ou do mínimo, respectivamente.

- **Ex. 9:** Caso existam, obtenha o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seguintes conjuntos:

  a) $A = [0,1[$

  b) $B =]-1,3[\cup \{5\}$

  c) $C =]-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,+\infty[$

Conjuntos Especiais

Conjunto	major	minor	sup	inf	max	min	*Limitado*
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	–	–	–	–	Não
$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	–	–	–	–	Não
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	–	–	–	–	Não
$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\emptyset$	–	–	–	–	Não
$\mathbb{N}$	$\emptyset$	$]-\infty, 1]$	–	1	–	1	Não
$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	–	–	–	–	Sim

2.2. Noções Topológicas em $\mathbb{R}$

2.2.1. Distância e Vizinhança

DEFINIÇÃO – Distância

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, dois pontos sobre a recta real. A **distância** entre a e b é dada por:

$$d(a, b) = |a - b|$$

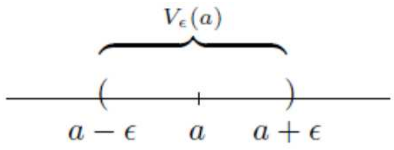
- **Propriedade:** $d(a, b) = d(b, a)$
- **Obs:** $|x - a|$ representa a distância de x a a na recta real.
- **Ex. 10:** Seja $A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ |x - 1| < 5\}$. Que conjunto é este?

DEFINIÇÃO – Vizinhança de um ponto

Seja $a \in \mathbb{R}$. A **vizinhança** de **centro** a e **raio** ε é o conjunto de todos os pontos reais x cuja distância a a é menor do que ε, isto é:

$$V_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}:\ d(x,a) < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R}:\ |x-a| < \varepsilon\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$$

Podemos representar geometricamente a vizinhança através da seguinte imagem:



- **Ex. 11:** a) Qual é a vizinhança de centro 5 e raio 0.1? Represente-a geometricamente.
  b) Qual é a vizinhança de centro -1 e raio 0.05?

2.2.2. Interior, Exterior, Fronteira e Aderência de um conjunto

DEFINIÇÕES – Pontos Interior, Exterior, Fronteiro e Aderente

Sejam $K \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:

- a é um **ponto interior** de K se existir uma vizinhança de a contida em K, isto é:
  se $\exists \varepsilon > 0\text{:}\ V_\varepsilon(a) \subset K$
- a é um **ponto exterior** de K se existir uma vizinhança de a sem pontos de K, isto é:
  se $\exists \varepsilon > 0\text{:}\ V_\varepsilon(a) \subset \overline{K}$
- a é um **ponto fronteiro** de K se qualquer vizinhança de a tem pontos de K e $\overline{K}$, isto é:
  $\forall \varepsilon > 0,\ V_\varepsilon(a) \cap K \neq \emptyset \wedge V_\varepsilon(a) \cap \overline{K} \neq \emptyset$
- a é um **ponto aderente** de K se for um ponto interior ou fronteiro de K.

DEFINIÇÕES – Interior, Exterior, Fronteira e Aderência de um conjunto
Seja $K \subset \mathbb{R}$. Então:
• o **interior** de K é o conjunto de todos os pontos interiores de K. Representa-se por: $\mathbf{int}(\boldsymbol{K})$.
• o **exterior** de K é o conjunto de todos os pontos exteriores de K. Representa-se por: $\mathbf{ext}(\boldsymbol{K})$.
• a **fronteira** de K é o conjunto de todos os pontos fronteiros de K. Representa-se por: $\mathbf{fr}(\boldsymbol{K})$.
• a **aderência** (ou **fecho**) de K é o conjunto de todos os pontos aderentes de K, e que é equivalente à união do interior com a fronteira de K, isto é: $\mathbf{ad}(\boldsymbol{K}) = \mathbf{int}(\boldsymbol{K}) \cup \mathbf{fr}(\boldsymbol{K})$

- **Obs:** Sendo $K \subset \mathbb{R}$, tem-se que:
  - $\text{int}(K)$, $\text{fr}(K)$ e $\text{ext}(K)$ formam uma **partição** de $\mathbb{R}$, isto é:
    - i) são disjuntos dois a dois;
    - ii) $\text{int}(K) \cup \text{fr}(K) \cup \text{ext}(K) = \mathbb{R}$
  - $\text{int}(K) = \text{ext}(\overline{K})$; $\text{ext}(K) = \text{int}(\overline{K})$; $\text{fr}(K) = \text{fr}(\overline{K})$.

- **Ex. 12:** Seja $A = [1,4[$. Classifique cada um dos seguintes pontos em relação ao conjunto A:
  - a) 1
  - b) 0.999
  - c) 2.5
  - d) 4
  - e) 3.999

- **Ex. 13:** Seja $A = [1,4[$. Obtenha o interior, o exterior, a fronteira e a aderência do conjunto A.

2.2.3. Conjuntos Abertos, Fechados e Compactos

DEFINIÇÕES – Conjunto Aberto, Fechado e Compacto
Seja $K \subset \mathbb{R}$. Então:
• K é um conjunto **aberto** se: $\operatorname{int}(K) = K$.
• K é um conjunto **fechado** se: $\operatorname{ad}(K) = K$.
• K é um conjunto **compacto** se for fechado e limitado.

- **Obs:** As noções de conjunto aberto e fechado não se excluem uma à outra. Isto é, podem existir conjuntos simultaneamente abertos e fechados, assim como conjuntos que não são abertos nem fechados (veja-se o próximo Ex. 14).

- **Ex. 14:** Classifique cada um dos seguintes conjuntos como aberto, fechado ou compacto.

  a) $A =]-1, 3[$

  b) $B = [2, +\infty[$

  c) $C = [-1, 3[\cup \{5\}$

- **Ex. 15:** Um conjunto real singular é fechado?

2.2.4. Pontos de Acumulação e Derivado de um conjunto

DEFINIÇÕES – Ponto de Acumulação e Derivado de um Conjunto
Sejam $K \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Então:
• a é **ponto de acumulação** de K se em qualquer vizinhança de a existir pelo menos um ponto de K diferente de a, isto é: $$\forall \varepsilon > 0,\ V_\varepsilon(a) \cap (K \backslash \{a\}) \neq \emptyset$$
• o **derivado** de K é o conjunto de todos os pontos de acumulação de K. Representa-se por: $\boldsymbol{K'}$.

- **Obs:** um ponto $a \in K$ que não é ponto de acumulação designa-se por **ponto isolado.**
  Logo, a é ponto isolado de K se existir uma vizinhança de a sem qualquer ponto de K à excepção do próprio ponto a, isto é:
  $$\exists \varepsilon > 0\colon\ V_\varepsilon(a) \cap (K \backslash \{a\}) = \emptyset$$

- **Ex. 16:** Obtenha o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:
  a) $A =]-1, 3[\cup \{5\}$
  b) $B = [2, +\infty[$

Topologia de Conjuntos Especiais

Conjunto	int	ext	fr	ad	Derivado	Aberto	Fechado	Compacto
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Sim	Sim	Não
$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Não	Não	Não
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Não	Não	Não
$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$	Não	Sim	Não
$\mathbb{N}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\emptyset$	Não	Sim	Não
$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	Sim	Sim	Sim

- **Ex. 17:** Seja o conjunto $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$.
  Obtenha o interior, exterior, fronteira, aderência e derivado deste conjunto.
  Refira também se o conjunto é aberto, fechado ou compacto.