Cap3. Sucessões e séries

3.1. Sucessão de números reais: revisão.

3.1.1 Definições e notação

- Def: **sucessão real** ou **sucessão de termos reais** é qualquer função $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
  que a cada natural $n \in \mathbb{N}$ associa um único número real $u(n)$.

- Notação: n − **ordem**
  $u(n)$ (ou u_n) − **termo de ordem** n.

- Ex. 1) $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
  $n \longmapsto n/2$

  Ex. 2) Sucessão de termo geral $v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

- Ex. 3) $w_1 = 1; w_{n+1} = \frac{w_n}{n+1}$

- Obs: uma sucessão pode ser definida
  por um termo geral (ex1 e ex2)
  ou por recorrência (ex3)

- Def: Uma **sucessão** (real) diz-se **majorada** se o conjunto dos seus termos, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, for majorado.
  Uma **sucessão** diz-se **minorada** se o conjunto dos seus termos, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, for minorado.
  Uma **sucessão** diz-se **limitada** se for simultaneamente majorada e minorada.

- Ex 1 e 2

- TPC: A sucessão do exemplo 3 é limitada?

- Def: A **sucessão** de termo geral u_n é **crescente** se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
  A **sucessão** de termo geral u_n é **decrescente** se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
  Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se **monótona**.

- Como se prova que uma sucessão é monótona?

- Ex 1,2,3

- TPC. Monotonia de $a_n = \frac{2n+6}{2n-3}$

3.1.2. Limites: definição e propriedades

- Def: Seja u_n o termo geral de uma sucessão e seja $a \in \mathbb{R}$.
  Diz-se que **a sucessão tende (converge) para** a ($u_n \to a$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ou $\lim u_n = a$) se
  $$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N}: \mathrm{n} \geq \mathrm{p} \Rightarrow |u_n - a| < \delta.$$
  A a chama-se **limite da sucessão.**

- Prop: O limite de uma sucessão, se existir, é único.

- Prop: Toda a sucessão convergente é limitada.

- Obs: O recíproco não é válido:
  uma sucessão limitada pode não ser convergente (Ex. 4: $x_n = (-1)^n$).

- Prop: Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.
- TPC: (cap3) ex 2a b c
- <u>Álgebra dos limites:</u>

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

Teor 1: Se $\lim u_n = a$ e $\lim v_n = b$ então

a) $\lim(u_n + v_n) = a + b$

b) $\lim(u_n . v_n) = a . b$

c) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$, se $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$

- TPC: Cap3 Ex2 c

- Ex: Calcule o limite da sucessão cujo termo geral é

a) n^2

b) $1/n$

c) $-n^2 + 200n$

d) $\frac{-n^2+3n}{2n^2+5n}$

e) $\frac{3n^2-2n+1}{n+3}$

f) $\frac{3n^2-2n+1}{n^3}$

g) $\frac{(-1)^n}{n}$

h) $\frac{3n^2+(-1)^n 5n+17}{-2n^2+50n}$

- Que tipo de indeterminações existem?

i) $\sqrt{n+5} + \sqrt{n+3}$

j) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}$

k) $\sqrt{n+5} - 3n$

- Teor 2: Considerem-se três sucessões reais, de termos gerais u_n, v_n e w_n.

  Se $v_n \leq u_n \leq w_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim v_n = \lim w_n = a$ então $\lim u_n = a$.

  (teor das sucessões enquadradas)

- Corol: O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo

  (ou seja, se $\lim u_n = 0$ e v_n for limitada, então $\lim u_n . v_n = 0$).

- Limites especiais:

  a) Seja a $\in \mathbb{R}$. Então $\lim a^n = \begin{cases} +\infty, & se\ a > 1 \\ 1, & se\ a = 1 \\ 0, & se\ |a| < 1 \\ \text{não existe}, & se\ a \leq -1 \end{cases}$

b) $\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$

se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = k$, $k \in \mathbb{R}$, então $\lim \left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^k$.

- Ex (cont)

l) 3^n

m) $(-3)^n$

n) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

o) $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

p) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^4$

q) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

r) $\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$

s) $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n$

t) $\left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^n$

u) $\left(\frac{n^3-7}{n^3}\right)^n$

v) $\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n$

3.1.3 Subsucessões

Def: **Subsucessão** de uma sucessão de termo geral u_n é qualquer sucessão formada por um subconjunto infinito de termos da sucessão de termo geral u_n (mantendo a ordem).

Ex: Seja $v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ (ex2).

subsucessão dos termos de ordem par: $v_{2n} =$

subsucessão dos termos de ordem ímpar: $v_{2n-1} =$

subsucessão dos termos cuja ordem é um múltiplo de 4:

- Prop: Seja $a \in \mathbb{R}$. Se $\lim u_n = a$ então todas as subsucessões de u_n convergem para a.

- Obs (contra-recíproco):
  Se uma sucessão tiver duas subsucessões com limites diferentes, então a sucessão não é convergente.

- Ex 5) $y_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$; Converge? Se sim, para quanto?
- Ex 2) $v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

- Prop: Uma sucessão converge para a se e só se a subsucessão dos termos de ordem ímpar e a subsucessão dos termos de ordem par tendem ambas para a, ou seja,

$$u_n \to a \quad \text{sse} \quad (u_{2n-1} \to a \ \text{e} \ u_{2n} \to a)$$

E, mais geralmente,

- Prop: **Se** existir um conjunto de subsucessões de u_n,
  disjuntas duas a duas,
  em número finito,
  todas com o mesmo limite a ($\in \mathbb{R}$),
  e tais que todos os termos de u_n pertençam a uma dessas subsucessões,

  então

  $u_n \to a$.

- TPC: Cap3 ex1 todo, ex 2d

3.1.4. Progressão Geométrica

- Def: Seja $r \in \mathbb{R}$. **Progressão geométrica** de **razão** r é qualquer sucessão em que cada termo, a partir do primeiro, é igual ao produto do anterior por r, ou seja

$$u_{n+1} = u_n \times r, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A soma dos k primeiros termos de uma progressão geométrica é

$$S_k = u_1 + \cdots + u_k = \sum_{n=1}^{k} u_n = \begin{cases} u_1 \dfrac{1-r^k}{1-r}, & \text{se } r \neq 1 \\ k \times u_1, & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

- Ex: Considere as sucessões de termos gerais $w_n = 3n$ e $x_n = 3 \times 2^n$.
  a)Para cada uma, verifique se se trata de uma progressão geométrica;
  b)Em caso afirmativo calcule i) a soma dos 11 primeiros termos
  ii) a soma do termo u_{23} ao u_{33}, inclusivé.

- TPC: ex2e, 3, 4.

- <u>Exemplo de aplicação</u> (TPC):

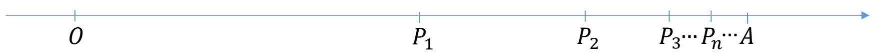
Há alguns anos contraí um empréstimo. Acabei de pagar mais uma prestação desse empréstimo e ainda me falta pagar, durante 20 anos, uma prestação fixa de 5000 euros por ano.

Acabei de herdar 100 000 euros e tenho muitos planos para os gastar, mas já decidi que vou fazer um depósito a prazo agora, que me garanta o pagamento das vinte prestações anuais que ainda me faltam pagar.

Quanto dinheiro tenho de depositar agora, sabendo que o juro (composto) anual líquido do depósito a prazo é de 1% ao ano?

<u>Obs</u>: Admita que é possível renegociar o empréstimo de modo a que, em cada ano, só se pague a prestação dos 5000 euros após os juros terem sido creditados na conta.

3.2. <u>Séries numéricas</u>
3.2.1. <u>Exemplo introdutório</u>



Seja $\overline{OA} = 1$ e sejam $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ pontos tais que

$$\overline{OP_1} = \overline{P_1A} = \frac{1}{2}, \quad \overline{P_1P_2} = \overline{P_2A} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \overline{P_2P_3} = \overline{P_3A} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

…

$$\overline{P_{n-1}P_n} = \overline{P_nA} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

…

Como $\overline{OP_n} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$, tem-se

$$\overline{OP_n} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Assim, $\overline{OA} = \lim_{n\to+\infty} \overline{OP_n} = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots}$

a esta "soma" de uma infinidade de parcelas chama-se série

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1.$$

- Def: À expressão

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

chama-se série de termo geral $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soma parcial é a **soma finita** $S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Soma da série, S, é o limite das somas parciais, se existir e for finito, ou seja,

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

3.2.2. Definições e exemplos

- Chama-se série de termo geral a_n e designa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

a uma expressão do tipo $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$,
onde a_n é uma sucessão de termos reais.

- Soma parcial, S_n, é a soma (finita) de n parcelas, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

- Diz-se que a série de termo geral a_n é convergente se existir e for finito o limite das somas parciais, isto é,

$$\text{se } \lim_{n\to+\infty} S_n = S, \quad S \in \mathbb{R}.$$

Quando a série é convergente, ao número S chama-se soma da série e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S.$$

- Def (cont) A série é divergente se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existir ou não for finito.

- Ex: Estude a convergência das seguintes séries

Ex1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Vimos que $S_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e que $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

ou seja, a série de termo geral $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente e tem soma 1.

Ex2. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$

Ex3. $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$

3.2.3. A série geométrica

Def: Chama-se série geométrica de razão r a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n, \qquad a, r \in \mathbb{R}.$$

Teor: A série geométrica é

a) convergente se e só se $|r| < 1$ e então tem soma $\frac{ar}{1-r}$.

b) divergente se e só se $|r| \geq 1$.

Ex 1,2,3

Obs: Se $|r| < 1$ então

$$\sum_{n=k}^{+\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1-r} .$$

3.2.4 Propriedades

Obs: A natureza de uma série não se altera por modificação de um número finito dos seus termos. Por exemplo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge se e só se } \sum_{n=123}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

Teor: Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, ou seja (contrarecíproco),

se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Obs: Pode acontecer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja divergente,
como é o caso da série harmónica,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} .$$

- Ex Estude a convergência das seguintes séries

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

b) $\sum_{n\geq 4} \frac{1}{2^n}$

c) $\sum_{n\geq 2} \frac{n+2}{3}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$

f) $\sum_{n\geq 2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

- Teor: Sejam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b_1 + \cdots + b_n + \cdots$$

duas série convergentes, de somas A e B, respetivamente.
Então,

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + b_n$ é convergente e tem soma $A + B$,

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Teor: (Critério de comparação)
Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries de termos positivos e tais que

$$a_n \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Se $\sum a_n$ for divergente então $\sum b_n$ também é divergente;

b) Se $\sum b_n$ for convergente então $\sum a_n$ também é convergente.

Nota1: Este critério permite demonstrar que a série harmónica,

$$\sum \frac{1}{n}$$

é divergente (dem Sec XIV, pelo bispo Nicole Oresme).

Nota2: Numa série, a alteração da ordem de uma infinidade de termos pode alterar a natureza da série.

3.2.5. Aplicações

Utilizando a teoria das séries numéricas é possível escrever qualquer dízima infinita periódica na forma de fração.

Por exemplo,

a) $0,(2)$

b) $0,(24)$

c) $3,(24)$

d) $0{,}3(45)$