Capítulo 3. Sucessões reais e séries.

1. Calcule o limite de cada uma das seguintes sucessões (ou conclua que não existe)

   a) $3+\frac{1}{2n}+2n[1-(-1)^n]$

   b) $\frac{\sin n}{n^2}$

   c) $\frac{n^2}{n^4+1}$

   d) $\frac{n^2+2}{3n+1}$

   e) $\frac{3n}{4n^3+1}$

   f) $\frac{-n^3}{4n^3-7}$

   g) $\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$

   h) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$

   i) $\sqrt{n}-\sqrt{n+1}+\frac{8^n}{11^n}$

   j) $\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{2n}$

   k) $\left(1-\frac{3}{n^2}\right)^{n}$

   l) $\left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^{n}$

   m) $\frac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$

   n) $\cos^2 n.\sin\frac{1}{n}$

   o) $\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)}$

   p) $\frac{n^2+3n}{n+2}-\frac{n^2-1}{n}$

   q) $\left(\frac{2n^2+1}{2n^2+4}\right)^{2n+1}$

   r) $\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{n+3}$

   s) $(2n+3)\left(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}\right)$

   t) $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2-2}$

   u) $\left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

2. Considere as sucessões de termo geral

$$a_n = \frac{9}{n} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad c_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^4 \qquad d_n = 5^n.3 \qquad \begin{cases} e_n = -3 + e_{n-1} \\ e_1 = 4 \end{cases} \qquad f_n = \frac{2^{n+2}}{(-5)^n}$$

   a) Estude a monotonia de cada uma;
   b) Averigue quais são limitadas;
   c) Sem calcular o limite, o que pode concluir sobre a convergência das sucessões de termo geral a_n e c_n?
   d) Calcule o limite de cada uma das sucessões ou conclua que não existe;
   e) Escreva uma expressão algébrica que represente cada uma das seguintes somas:

   (i) $\sum_{n=3}^{272} d_n$ (ii) $\sum_{n=5}^{104} f_n$

3. Utilize o símbolo $\sum$ para escrever

   a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
   b) $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
   c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
   d) $1 + 3 + 5 + 7$
   e) $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$

4. a) Averigue se alguma das sucessões é uma progressão geométrica e, nos casos afirmativos, deduza uma expressão algébrica (sem o símbolo $\sum$) que represente a soma dos 100 primeiros termos

   i) $8,\ 1,\ \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}, \ldots$
   ii) $-2,\ 6, -18,\ 54, \ldots$
   iii) $2^{1/3},\ 1,\ 2^{-1/3},\ 2^{-2/3},\ 2^{-1}, \ldots$

   b) Para cada sucessão, escreva com o símbolo $\sum$ uma expressão que represente a soma dos termos apresentados (por exemplo, para i), use o símbolo $\sum$ para representar $8 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512}$).

5. Mostre que as seguintes séries são divergentes

   a) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{101}{100}\right)^n$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

6. Justifique quais das séries são geométricas e calcule a soma das geométricas que são convergentes

   a) $8+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\cdots$
   b) $-2+6-18+54-\cdots$
   c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} (x)^{2n}$
   f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$

7. Averigue se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma

   a) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   b) $\sum_{n\geq 1} 3^n$

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$

   d) $\sum_{n\geq 3} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$

   e) $\sum_{n\geq 2} 5^{-n}$

   f) $\sum_{n\geq 0} (-2)^n$

8. Estude a convergência das seguintes séries e calcule a soma das que forem convergentes
   a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$
   b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-|x|)^{n-1}$

9. Determine a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} a\left(1+\frac{b}{100}\right)^{-n}$, com $b>0$.

10. Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as séries convergem e calcule a sua soma

    a) $\sum_{n\geq 0}(3x-4)^n$

    b) $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

    c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$

    d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{(x+1)^{3n}}$

    e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^{n-1}}$

    f) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9}$

11. Utilizando a teoria das séries geométricas, escreva as seguintes dízimas sob a forma de frações irredutíveis
    a) $1,(6)$ b) $0,(25)$

12. Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{an^2+n}{n^2-1}$, com $a \in \mathbb{R}$. Indique a resposta correta

    a) Se $a \neq 0$ então a série é divergente
    b) Se $a \neq 0$ então a série é convergente
    c) A série é convergente $\forall a \in \mathbb{R}$
    d) A série é convergente, se $a = 1$.

13. A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^2)^n$ é igual a

    a) $\frac{1}{x^2}-1,\ \text{se } x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$

    b) $\frac{1}{x^2}-1,\ \text{se } x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\ \backslash\{0\}$

    c) $\frac{1}{x^2},\ \text{se } x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[\ \backslash\{0\}$

    d) $\frac{1}{x^2},\ \text{se } x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

14. Considere a série

$$4x^2+16x^4+64x^6+\cdots$$

    com soma S, se convergente.

    Qual das seguintes afirmações está correta?

    a) $S=(1-4x^2)^2-1,$ se $|x|<\frac{1}{2}$
    b) $S=(1-4x^2)^{-1}-1,$ se $|x|<\frac{1}{2}$
    c) $S=(1-4x^2)^{-1},$ se $|x|<\frac{1}{2}$
    d) $S=(1-4x^2)^{-2},$ se $|x|<1$.