Gestão do Desporto

Matemática I

2019/2020

Capítulo 3

3. Sucessões e Séries Reais

3.1. Sucessões

- ***3.1.1. Definições Principais e Notação***
- ***3.1.2. Limites: Definição e Propriedades***
- ***3.1.3. Subsucessões***
- ***3.1.4. A Progressão Geométrica***

3.2. Séries

- ***3.2.1. Definição e Notação***
- ***3.2.2. Convergência***
- ***3.2.3. A Série Geométrica***
- ***3.2.4. Propriedades***

3.1. Sucessões

3.1.1. Definições Principais e Notação

DEFINIÇÃO – Sucessão Real

Uma **sucessão real** (ou **sucessão de termos reais**) é qualquer correspondência $u: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ associa um único número real $u(n) \in \mathbb{R}$.

- n – **ordem** da sucessão;
- $u(n)$ – **termo de ordem n** da sucessão.

- **Obs:** Em termos de notação, é corrente utilizar u_n em vez de $u(n)$ para representar o termo da sucessão.

- **Obs:** Uma sucessão pode ser definida de duas maneiras:

  1) por um **termo geral**; por exemplo:

$$\begin{aligned} u: \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n/2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

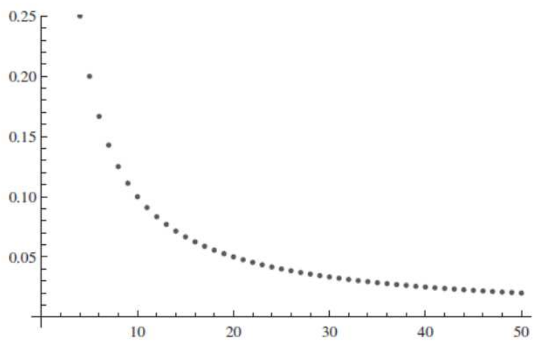
  2) por **recorrência**; por exemplo:

$$w_1 = 1; \; w_{n+1} = \frac{w_n}{n+1}$$

- **Ex. 1:** Defina a sucessão que a cada natural associa a sua raiz quadrada.

Representação Gráfica de uma Sucessão

Uma sucessão pode ser representada através de uma sequência de pontos. Por exemplo, a sucessão u com termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ tem o seguinte gráfico:



DEFINIÇÕES – Sucessão Majorada, Minorada e Limitada
Seja u uma sucessão real. Então:
• u é **majorada** se o conjunto dos seus termos $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ for majorado.
• u é **minorada** se o conjunto dos seus termos $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ for minorado.
• u é **limitada** se for simultaneamente majorada e minorada.

- **Ex. 2:** A sucessão w definida por: $w_1 = 1;\ w_{n+1} = \frac{w_n}{n+1}$ é limitada?

DEFINIÇÕES – Sucessão Crescente, Decrescente e Monótona
Seja u uma sucessão real de termo geral u_n. Então:
• u é **crescente** se: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
• u é **decrescente** se: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
• u é **monótona** se for crescente ou decrescente.

- **Obs:** Para provar que uma sucessão é monótona, calcula-se a diferença entre termos consecutivos, $u_{n+1} - u_n$:
  - se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$, então u é monótona crescente;
  - se $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$ então u é monótona decrescente.

- **Ex. 3:** Analise a monotonia da sucessão com termo geral $a_n = \frac{2n+6}{2n-3}$.

3.1.2. Limites: Definição e Propriedades

DEFINIÇÃO – Limite de uma Sucessão (Convergência)

Seja u uma sucessão com termo geral u_n, e seja $a \in \mathbb{R}$.

A sucessão u **tende** (**converge**) para a se:

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}: n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

E escreve-se:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim u_n = a \quad \text{ou} \quad u_n \to a$$

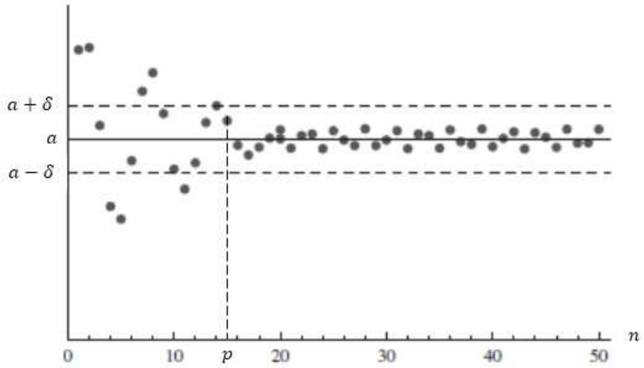
O valor a designa-se por **limite da sucessão** u, e diz-se que a sucessão é **convergente**.

- **Propriedade:** O limite de uma sucessão, se existir, é único.

- **Obs:** Uma sucessão que não é convergente diz-se **divergente**.
  Por exemplo, as sucessões com termos gerais $u_n = n$ e $v_n = (-1)^n$ são divergentes, pois quando $n \to +\infty$, u diverge para $+\infty$ e v assume os valores 1 e -1 de maneira sucessiva.

Representação gráfica da definição de convergência

Visualmente, a definição de convergência pode ser ilustrada através da seguinte imagem:



Algumas propriedades das sucessões e relação com a convergência

- **Propriedade:** Toda a sucessão convergente é limitada.
  - o contrarecíproco permite concluir que se uma sucessão não é limitada, então é divergente. Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n}$ não é limitada; logo é divergente.
  - o recíproco não é válido, isto é: uma sucessão limitada pode não ser convergente. Por exemplo, a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$ é limitada, mas não é convergente.

- **Propriedade:** Toda a sucessão limitada e monótona é convergente.

  Por exemplo, a sucessão com termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ é limitada e monótona decrescente; logo é uma sucessão convergente.

Limites Importantes

- Seja $q \in \mathbb{Q}$. Então: $\lim n^q = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q > 0 \\ 1, & \text{se } q = 0 \\ 0, & \text{se } q < 0 \end{cases}$

- Seja $a \in \mathbb{R}$. Então: $\lim a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 1, & \text{se } a = 1 \\ 0, & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{não existe}, & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$

- Seja $k \in \mathbb{R}$. Então: $\lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$
  - se $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = k$, então: $\lim \left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)^{u_n} = e^k$.

Álgebra dos Limites

Álgebra com Limites Finitos
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lim u_n = a$ e $\lim v_n = b$, então:
• $\lim(u_n + v_n) = a + b$
• $\lim(u_n - v_n) = a - b$
• $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$
• $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$, se $v_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, e $b \neq 0$

Álgebra dos Limites

Álgebra com Limites Infinitos – Adição
Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty$ limites de sucessões. Então:
• $a + (+\infty) = +\infty$
• $a + (-\infty) = -\infty$
• $+\infty + (+\infty) = +\infty$
• $-\infty + (-\infty) = -\infty$

Álgebra dos Limites

Álgebra com Limites Infinitos – Multiplicação
Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\pm\infty$ limites de sucessões. Então:
• $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
• $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
• $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
• se $a > 0,\ a \cdot (+\infty) = +\infty$ e $a \cdot (-\infty) = -\infty$
• se $a < 0,\ a \cdot (+\infty) = -\infty$ e $a \cdot (-\infty) = +\infty$

Álgebra dos Limites

Álgebra com Limites Infinitos – Divisão
Sejam u e v duas sucessões.
• se $\lim(u_n) = 0^+$, então: $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
• se $\lim(u_n) = 0^-$, então: $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
• se $\lim(u_n) = \pm\infty$, então: $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0$

Indeterminações

Os principais tipos de indeterminações são os seguintes:

- $+\infty + (-\infty)$
- $0 \times (\pm\infty)$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- 1^∞ (nos limites do tipo $u_n^{v_n}$, onde $u_n \to 1$ e $v_n \to +\infty$, em que $u_n \neq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$)
- ∞^0
- 0^0

Teoremas Importantes sobre Limites

TEOREMA – Sucessões Enquadradas

Sejam t, u e v sucessões reais de termos gerais t_n, u_n e v_n.

Se $t_n \leq u_n \leq v_n$ e $\lim t_n = \lim v_n = a$, então: $\lim u_n = a$.

TEOREMA

O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, isto é:

se $\lim u_n = 0$ e v_n limitada, então: $\lim u_n \cdot v_n = 0$.

- **Ex. 4:** Calcule o limite da sucessão cujo termo geral é:

a) n^2	b) $1/n$	c) $-n^2 + 2n$
d) $5n^2 - 100n$	e) $(n^2 + 1)/n$	f) $\frac{-n^2+3n}{2n^2+5n}$
g) $\frac{3n^2-2n+1}{n+3}$	h) $\frac{3n^2-2n+1}{n^3}$	i) $\frac{3n^2}{n^3-3n}$
j) $\frac{\sin n}{n}$	k) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n}$	l) $\left(1 + \frac{3}{5n}\right)^n$
m) $\left(5 - \frac{2}{n}\right)^n$	n) $\left(\frac{3n+1}{3n+6}\right)^n$	o) $\frac{3n^2+(-1)^n 5n+17}{-2n^2+50n}$

3.1.3. Subsucessões

DEFINIÇÃO – Subsucessão

Uma **subsucessão** é qualquer sucessão formada por um subconjunto infinito de termos de uma sucessão real de termo geral u_n, mantendo a respectiva ordem.

- **Ex. 5:** Seja u uma sucessão real com termo geral $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

  a) Obtenha a subsucessão dos termos de ordem par?

  b) Obtenha a subsucessão dos termos de ordem ímpar?

- **Propriedade:** Sejam u uma sucessão real e $a \in \mathbb{R}$.

  Se $\lim u_n = a$, então todas as subsucessões de u convergem para a.

- **Obs:** O contrarrecíproco da propriedade anterior permite concluir que:

  Se existirem duas subsucessões de u com limites diferentes, então a sucessão u não é convergente.

- **Propriedade:** Uma sucessão u converge para a se e só se a subsucessão dos termos de ordem ímpar e a subsucessão dos termos de ordem par tendem ambas para a, isto é:

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \lim u_{2n-1} = a \wedge \lim u_{2n} = a$$

- **Ex. 6:** As sucessões u e v com os termos gerais seguintes convergem? Se sim, para quanto?

  a) $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ b) $v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

3.1.4. A Progressão Geométrica

DEFINIÇÃO – Progressão Geométrica

Uma **progressão geométrica de razão $\boldsymbol{r}$** ($\in \mathbb{R}$) é qualquer sucessão em que cada termo, a partir do primeiro, é igual ao produto do anterior por r, ou seja:

$$u_{n+1} = u_n \times r \,, \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Resultado:** A soma dos k primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \sum_{n=1}^{k} u_n = \begin{cases} u_1 \dfrac{1-r^k}{1-r}, & \text{se } r \neq 1 \\ k \times u_1 \,, & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

- **Ex. 7:** Considere as sucessões de termos gerais $u_n = 3n$ e $v_n = 3 \times 2^n$.

  a) Para cada uma das sucessões verifique se se trata de uma progressão geométrica.

  b) Em caso afirmativo calcule:

  i) a soma dos 11 primeiros termos;

  ii) a soma do termo u_{23} ao u_{33}, inclusive.

- **Ex. 8:** Há alguns anos contraí um empréstimo. Acabei de pagar mais uma prestação desse empréstimo e ainda me falta pagar, durante 20 anos, uma prestação fixa de 5000 euros por ano.

  Acabei de herdar 100 000 euros e tenho muitos planos para os gastar, mas já decidi que vou fazer um depósito a prazo agora, que me garanta o pagamento das vinte prestações anuais que ainda me faltam pagar.

  Quanto dinheiro tenho de depositar agora, sabendo que o juro (composto) anual líquido do depósito a prazo é de 1% ao ano?

  Obs: Admita que é possível renegociar o empréstimo de modo a que, em cada ano, só se pague a prestação dos 5000 euros após os juros terem sido creditados na conta.

3.2. Séries

3.2.1. Definição e Notação

DEFINIÇÃO – Série Real

Uma **série real** (ou **série de termos reais**) é qualquer expressão da forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

onde a_n é uma sucessão real e designa-se por **termo geral** da série.

- **Ex. 9:** Defina a série cujo termo geral é a sucessão dos quadrados dos números naturais.

3.2.2. Convergência

DEFINIÇÃO – Soma Parcial de uma Série

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série real, com termo geral a_n. A soma finita dos primeiros n termos da sucessão a é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

E designa-se por **soma parcial** da série.

- **Obs:** O conjunto de todas as somas parciais S_n de uma série é uma sucessão! Em particular, os respectivos termos são:
  - $S_1 = a_1$
  - $S_2 = a_1 + a_2$
  - $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
  - …

- **Ex. 10:** Considere a seguinte série: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

  a) Obtenha os primeiros 6 termos da sucessão das somas parciais S_n da série.

  b) Mostre por indução matemática que a sucessão das somas parciais $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- **Ex. 11:** Considere a seguinte série: $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$.

  a) Obtenha os primeiros 5 termos da sucessão das somas parciais S_n da série.

  b) Mostre por indução matemática que: $S_n = \frac{3^{n+1}-3}{2}$.

DEFINIÇÃO – Convergência de uma Série

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é **convergente** se o limite da sucessão das somas parciais existir e for finito, isto é, se:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S, \qquad S \in \mathbb{R}$$

Neste caso, o número real ***S*** designa-se por **soma da série** e escreve-se:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

- **Obs:** Uma série é **divergente** se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existir ou não for finito.

- **Ex. 12:** Estude a convergência das seguintes séries:

  a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

  b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n$

  c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

3.2.3. A Série Geométrica

São poucas as séries que podem ser estudadas a partir da definição de convergência, pois costuma ser bastante complicado obter uma expressão geral para a sucessão das somas parciais S_n à qual se possa depois aplicar o limite. Um caso especial de séries que permitem um estudo mais aprofundado são as séries geométricas.

DEFINIÇÃO – Série Geométrica

Uma **série geométrica de razão r** é qualquer série da forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n \qquad (a, r \in \mathbb{R})$$

- **Ex. 13:** A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é geométrica? Se sim, qual a sua razão?

TEOREMA – Convergência e Divergência da Série Geométrica

A série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n$ é:

- **convergente** se e só se: $|r| < 1$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^n = a \cdot \frac{r}{1-r}$
- **divergente** se e só se: $|r| \geq 1$.

- **Resultado:** Se $|r| < 1$, então:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} ar^n = a \cdot \frac{r^k}{1-r}$$

- **Ex. 14:** Indique se as seguintes séries geométricas são convergentes (e respectiva soma) ou divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

3.2.4. Propriedades

TEOREMA – Convergência da Adição de Séries e do Produto por um Escalar

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries convergentes, de somas A e B, respectivamente. Então, a série:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é convergente e tem soma $A + B$;
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n)$ é convergente e tem soma λA ($\lambda \in \mathbb{R}$).

- **Ex. 15:** Mostre que as seguintes séries são convergentes e calcule as respectivas somas:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n+1}{5^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n+1}}{6^n}$

TEOREMA – Critério de Comparação

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos positivos tais que:

$$a_n \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também é divergente;
- se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente.

- **Ex. 16:** Mostre que a *série harmónica* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.

- **Ex. 17:** Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ é convergente.

TEOREMA

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for uma série convergente, então: $\lim a_n = 0$.

- **Obs:** O contrarecíproco do teorema anterior permite concluir que se $\lim a_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

- **Ex. 18:** Mostre que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2n^2+2}$ é divergente.

- **Obs:** Pode acontecer que $\lim a_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seja divergente, como é o caso, por exemplo, da série harmónica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

- **Propriedade:** A natureza (convergência/divergência) de uma série não se altera quando se modifica um número finito dos seus termos.

- **Ex. 19:** A série $\sum_{n=252}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente?

- **Nota:** A natureza de uma série pode alterar-se ao modificar-se a ordem de uma infinidade dos termos. Por exemplo, ao reordenar-se todos os termos de uma sucessão convergente a partir de uma certa ordem, poderemos obter uma sucessão divergente.

- **Ex. 20:** Estude a convergência das seguintes séries:

  a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$

  b) $\sum_{n\geq 4}\frac{1}{2^n}$

  c) $\sum_{n\geq 2}\frac{n+2}{3}$

  d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n$

  e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}$

  f) $\sum_{n\geq 2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

- **Ex. 21:** A teoria das séries numéricas permite escrever qualquer dízima infinita periódica na forma de fracção. Faça-o para os seguintes casos:

  a) $0.(2)$

  b) $0.(24)$

  c) $3.(24)$

  d) $0.3(45)$