Exercises of Lévy Processes and Applications

João Guerra

13/09/2012

Contents

1 Exercises **2**

2 Exam problems **6**

3 Problemas de Exame **9**

This list of exercises was prepared for the course "Lévy Processes and applications", of the MSc. degree in Financial Mathematics in ISEG, Technical University of Lisbon, in the academic year 2012/2013.

Chapter 1

Exercises

Exercise 1.1 *If* ϕ_μ *is a characteristic function, show that* $|\phi_\mu(u)| \leq 1$.

Exercise 1.2 *Show that if* μ *and* ν *are infinitely divisible distributions then* $\mu * \nu$ *is infinitely divisible.*

Exercise 1.3 *Prove the Proposition: The following are equivalent:*

1. X is infinitely divisible.
2. μ_X has a convolution n-th root that is the law of a random variable, for each $n \in \mathbb{N}$
3. ϕ_X has an n-th root that is the characteristic function of a random variable, for each $n \in \mathbb{N}$

Exercise 1.4 *Let* $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Show that the gamma-*(α, β) *distribution*

$$\mu_{\alpha,\beta}(dx) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx, \quad \textit{with } x > 0$$

is an infinitely-divisible distribution.

Exercise 1.5 *Show that if* $X \sim N(m, A)$, *where* A *is a* $d \times d$ *strictly positive-definite symmetric covariance matrix:* $A = E\left[(X-m)(X-m)^T\right]$ *then* $\phi_X(u) = \exp\left(i(m,u) - \frac{1}{2}(u, Au)\right)$

Exercise 1.6 *Let* $d = 1$. *Show that if* $X \sim Po(\lambda)$ *then* $\phi_X(u) = \exp\left[\lambda\left(e^{iu} - 1\right)\right]$.

Exercise 1.7 *Let* X *and* Y *be independent standard normal random variables (with mean 0). Show that* Z *has a Cauchy distribution, where* $Z = X/Y$ *if* $Y \neq 0$ *and* $Z = 0$ *if* $Y = 0$.

Exercise 1.8 *Prove that if* X *is stochastically continuous, then the map* $t \rightarrow \phi_{X(t)}(u)$ *is continuous for each* $u \in \mathbb{R}^d$.

Exercise 1.9 *Show that if* X *and* Y *are stochastically continuous processes , so is their sum* $X+Y$ *(hint: use the elementary inequality:* $P(|A+B|>C) \leq P\left(|A|>\frac{C}{2}\right)+P\left(|B|>\frac{C}{2}\right)$ *with* A, B *random variables.*

Exercise 1.10 *Show that* $E\left[e^{-uT(t)}\right] = \int_0^\infty e^{-us} f_{T(t)}(s)\,ds = e^{-tu^{\frac{1}{2}}}$. *(Hint: Differentiate* $g_t(u) = \int_0^\infty e^{-us} f_{T(t)}(s)\,ds$ *with respect to* u *and make the substitution* $x = \frac{t^2}{4us}$ *to obtain the differential equation* $g_t'(u) = -\frac{t}{2\sqrt{u}} g_t(u)$. *Via the substitution* $y = \frac{t}{2\sqrt{s}}$ *we see that* $g_t(0) = 1$ *and the result follows).*

Exercise 1.11 *Prove that if* T *is a gamma subordinator and* B *is a Brownian motion then* $Z(t) = B(T(t))$ *is a Lévy process with characteristic function*

$$\Phi_{Z(t)}(u) = E\left[e^{uiZ(t)}\right] = \left(1+\frac{u^2}{2b}\right)^{-at}.$$

Exercise 1.12 *If* X *is a Lévy process, show that* $\exp\{i(u, X(t)) - t\eta(u)\}$ *is a martingale.*

Exercise 1.13 *For a simple process* F, *show that* $\mathbb{E}[I(F)] = 0$.

Exercise 1.14 *Prove that if* X *is a one-dimensional Brownian motion then the OU process* $Y(t)$ *is a Gaussian process with mean* $e^{-\lambda t} y_0$ *and variance* $\frac{1}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$.

Exercise 1.15 *Prove that if* Y *is a Lévy-type stochastic integral and* $\inf\{\Delta Y(t), t \geq 0\} > -1$ *a.s., then each* $\mathcal{E}_Y(t)$ *is a.s. finite.*

Exercise 1.16 *Prove that* $d\mathcal{E}_Y(t) = \mathcal{E}_Y(t)\,dY(t)$, *by apllying the Itô formula to*

$$\begin{aligned} dS_Y(t) &= F(t)\,dB(t) + \left(G(t) - \frac{1}{2}F(t)^2\right)dt \\ &\quad + \int_{|x|\geq 1} \log(1+K(t,x))\,N(dt,dx) + \int_{|x|<1} \log(1+H(t,x))\,\widetilde{N}(dt,dx) \\ &\quad + \int_{|x|<1} \left(\log(1+H(t,x)) - H(t,x)\right)\nu(dx)\,dt, \end{aligned} \tag{1.1}$$

and recall that $\mathcal{E}_Y(t) = e^{S_Y(t)}$.

Exercise 1.17 *Consider the Lévy measure*

$$\nu\left(x\right)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\left(x\right)$$

associated to the Lévy process $X(t)$.

(a) Calculate

$$\mathbb{E}\left[\int_{\varepsilon}^{1}x^{2}N\left(t,dx\right)\right],\quad \textit{and}$$
$$\operatorname{Var}\left[\int_{\varepsilon}^{1}x^{2}N\left(t,dx\right)\right].$$

(b) Show that

$$\sum_{\{0\leq s\leq t:\Delta X(s)\in[\varepsilon,1]\}}\left(\Delta X\left(s\right)\right)^{2}-\frac{2}{3}t\left(1-\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)$$

is a martingale .

Exercise 1.18 *Consider the Poisson integral*

$$\int_{1}^{+\infty}x^{\frac{1}{4}}N\left(t,dx\right)$$

and the associated Lévy measure $\nu\left(x\right)=\frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}\left(x\right)$. *Calculate* $\operatorname{Var}\left[\int_{1}^{+\infty}x^{\frac{1}{4}}N\left(t,dx\right)\right]$.

Exercise 1.19 *Consider a simple process*

$$F\left(t,x\right)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}F_{k}\left(t_{j}\right)\mathbf{1}_{(t_{j},t_{j+1}]}(t)\mathbf{1}_{A_{k}}(x),$$

where the sets A_k *are disjoint for different values of* k *and* $t\in[0,T]$. *Show that*

$$\mathbb{E}\left[\left(I\left(F\right)\right)^{2}\right]=\int_{0}^{T}\int_{E}\mathbb{E}\left[\left|F\left(t,x\right)\right|^{2}\right]\nu\left(dx\right)dt.$$

Exercise 1.20 *Let* X *be a Lévy-type of integral of the form*

$$dX\left(t\right)=\mu\left(t\right)dt+\sigma\left(t\right)dB\left(t\right)+\int_{|x|>1}\gamma\left(t,x\right)N\left(dt,dx\right)+\int_{|x|\leq1}\gamma\left(t,x\right)\widetilde{N}\left(dt,dx\right),$$

with $\mu\left(t\right)+\frac{(\sigma(t))^{2}}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{\gamma(t,x)}-1-\gamma\left(t,x\right)\mathbf{1}_{\{|x|\leq1\}}(x)\right)\nu\left(dx\right)=0$ *a.s. for all* t.

(a) Show that

$$e^{X(t)} = e^{X_0} + \int_0^t F(s)dB(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(s,x)\widetilde{N}(ds,dx)$$

and find expressions for the processes $F(s)$ *and* $H(s,x)$.

(b) Assume that $|\sigma(t)|$ *and* $\left|\int_{\mathbb{R}} \left(e^{\gamma(t,x)} - 1\right)^2 \nu(dx)\right|$ *are bounded by a constant* C. *Use Gronwall's Lemma in order to show that* $e^{X(t)}$ *is a square-integrable martingale.*

(Note: Gronwall's Lemma: Let ϕ *be a positive and locally bounded function on* $\mathbb{R}_0^+$ *such that* $\phi(t) \leq a + b\int_0^t \phi(s)\,ds$ *for all* t, *with* $a, b \geq 0$. *Then* $\phi(t) \leq ae^{bt}$.*)*

Exercise 1.21 *Consider the stochastic differential equation (of the so-called Geometric Lévy process):*

$$dX(t) = X(t-)\left[bdt + \sigma dB(t) + \int_{|x|<1} H(t,x)\widetilde{N}(dt,dx) + \int_{|x|\geq 1} K(t,x)N(dt,dx)\right],$$

where b, σ *are constants,* $H(t,x) \geq -1$ *for all* t *and* x *and* $H(t,x)$ *and* $K(t,x)$ *are processes such that the Poisson integrals above are well defined. Determine the solution of this equation*

Exercise 1.22 *Let*

$$dX_i(t) = \alpha_i(t)dt + \sigma_i(t)dB(t) + \int_{|x|<1} H_i(t,x)\widetilde{N}(dt,dx) + \int_{|x|\geq 1} K_i(t,x)N(dt,dx),$$

for $i = 1, 2$.

(a) Calculate $d(X_1(t)X_2(t))$.

(b) Knowing that $X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + [X,Y](t)$, *and from the result obtained in (a), calculate* $[X_1, X_2](t)$.

Exercise 1.23 *Let* $X(t)$ *be a Lévy-type of integral of the form*

$$dX(t) = \alpha(t)\,dt + \sigma(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \gamma(t,x)\widetilde{N}(dt,dx).$$

Consider the process $Y(t) = f(X(t))$ *and determine the processes* $a(t)$, $b(t)$ *and* $c(t,x)$ *such that*

$$dX(t) = a(t)\,dt + b(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} c(t,x)\widetilde{N}(dt,dx),$$

in the following cases:

(a) $Y(t) = (X(t))^2$

(b) $Y(t) = \cos(X(t))$

Chapter 2

Exam problems

Exercise 2.1 *Discuss the main drawbacks of the classical Black-Scholes model (in finance) and explain how the Lévy processes can be used to overcome these drawbacks.*

Exercise 2.2 *State the Lévy-Itô decomposition for a general Lévy process and present a financial interpretation for the jump terms of this decomposition.*

Exercise 2.3 *Consider a "jump-diffusion" model without compensation term for the jumps.*

(a) Define the Lévy process associated to the Merton "jump-diffusion" model, give an interpretation of each term in the definition, present the characteristic function of the Lévy process at time $t = 1$ and present the characteristic triplet of the process.

(b) Consider the "jump-diffusion" process where the distribution for the jump sizes has a probability density function given by:

$$f_J(x) = p\theta_1 e^{\theta_1 x}\mathbf{1}_{\{x<0\}} + (1-p)\,\theta_2 e^{-\theta_2 x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Calculate the characteristic function for the "jump-diffusion" process at time $t = 1$ and show that the measure ν associated to the process satisfies the conditions of a Lévy measure.

Exercise 2.4 *Consider a distribution with characteristic function*

$$\phi(u) = \exp\left(imu - \sigma|u|\left[1 + i\beta\frac{2}{\pi}\mathrm{sgn(u)}\log|u|\right]\right),$$

where $\sigma > 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ and $m \in \mathbb{R}$.

(a) Show that this distribution is infinitely divisible

(b) Let X be a random variable with the distribution associated to $\phi(u)$ in the case $\beta = 0$. State the usual name given to the distribution of X, present the probability density function of X, present the value of $\mathbb{E}[|X|]$ and discuss how is the decay of the distribution tail of X when $x \to +\infty$, i.e., how is the decay of $\mathbb{P}[X > x]$ as a function of x when $x \to +\infty$.

Exercise 2.5 *Let X be a Lévy process with Lévy measure $\nu(dx) = \frac{\exp(-x)}{x^2}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.*

(a) Calculate the expected value of the Poisson integral

$$\mathbb{E}\left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^x N(t,dx)\right].$$

where $\varepsilon > 0$ and deduce how is the function $h(t,\varepsilon)$ such that

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^x N(t,dx) - h(t,\varepsilon)$$

is a martingale.

(b) Consider that the process X is the solution of the stochastic differential equation

$$dX_t = 2X_{t-}dt + X_{t-}dB_t + X_{t-}\int_{|x|\geq 1}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)N(dt,dx).$$

Solve this equation.

Exercise 2.6 *Consider a financial market with one risky asset with price process S_t given as the solution of the stochastic differential equation*

$$dS(t) = S(t-)\,dZ(t),$$

where $Z(t) = \sigma X(t) + \mu t$ and $X(t)$ is a Lévy process with decomposition

$$X(t) = mt + kB(t) + \int_c^{+\infty} x\widetilde{N}(t,dx),$$

where $k \geq 0$, $m \geq 0$ and $c < -1$. Assume that the riskless interest rate is $r > 0$.

(a) State the condition that σ, μ, k, m and r must satisfy in order for the discounted price process $\widetilde{S}$ to be a martingale with respect to an equivalent martingale measure Q and discuss the completeness of the market in the following cases:

(i) $X(t) = mt + \widetilde{N}(t)$, where $\widetilde{N}(t)$ is a compensated Poisson process

(ii) $X = mt + \widetilde{N}_1(t) + \widetilde{N}_2(t)$, *where* $\widetilde{N}_1$ *and* $\widetilde{N}_2$ *are compensated Poisson processes with intensities* λ_1 *and* λ_2 *and with constant jump sizes* c_1 *e* c_2, *respectively (*$\widetilde{N}_1$ *and* $\widetilde{N}_2$ *are also independent).*

(b) Show that the general condition that must be satisfied in order for the discounted price process $\widetilde{S}$ *to be a martingale with respect to an equivalent martingale measure* Q *is an equation that has, in general, an infinite number of solutions* (F, H).

Hint: Consider that $\frac{dP}{dQ} = e^{Y(T)}$ *where*

$$dY(t) = G(t)dt + F(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} H(t,x)\widetilde{N}(dt,dx)$$

and show that if the pair (F, H) *is a solution then the pair* $\left(F + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} f(x)\nu(dx)\right.$, $\left.\log\left(e^H - \frac{kf(x)}{x}\right)\right)$ *is also a solution for any* $f \in L^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \nu)$.

Chapter 3

Problemas de Exame

Exercise 3.1 *Defina o que entende por variável aleatória infinitamente divisível e por variável aleatória estável, apresente 3 exemplos de distribuições infinitamente divisíveis e 3 exemplos de distribuições estáveis.*

Exercise 3.2 *Seja* $X = (X_1, X_2, X_3)$ *um vector aleatório Gaussiano com distribuição* $N(m, A)$*, onde* $A = I$ *é a matriz de covariância simétrica e definida positiva e* $m = (1, -1, 0)$*. Sabendo que a função característica geral para uma variável aleatória Gaussiana unidimensional de distribuição* $N(\mu, \sigma^2)$ *é*

$$\phi(u) = \exp\left(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right),$$

diga qual é a função característica do vector $X = (X_1, X_2, X_3)$ *e mostre que a distribuição de* X *é infinitamente divisível.*

Exercise 3.3 *Considere um processo de Lévy* $U(t)$ *com características* (b, c, ν)*.*

(a) Quais as condições que devem satisfazer os parâmetros b *e* c *e a medida de Lévy* ν *de forma a que o processo* U *seja um subordinador? Apresente ainda a forma geral da função característica de* $U(t)$ *quando o processo* U *é um subordinador.*

(b) Seja U *um subordinador* $(1/2)$*-estável e* X *um processo estocástico tal que* $X(t) = \sqrt{2}B(t)$*, onde* $B(t)$ *é um movimento Browniano standard independente de* $U(t)$*. Que tipo de processo é o processo (que se obtém por transformação temporal)* $V(t) = X(U(t))$ *e qual a distribuição de* $V(1)$*? Justifique adequadamente.*

Exercise 3.4 *Considere um processo de Lévy* X_t *com tripleto de características* $(b, 0, \nu)$ *e medida de Lévy* $\nu(dx) = x^{\alpha}\mathbf{1}_{\{0<x<1\}} + x^{\beta}\mathbf{1}_{\{x>1\}}$*. Determine quais os valores para os parâmetros* α *e* β *de forma a que* ν *seja uma medida de Lévy e o processo tenha:*

(i) actividade finita
(ii) actividade infinita
(iii) trajectórias com variação finita

Exercise 3.5 *Seja X um processo de Lévy com tripleto de características (b, c, ν) e com medida de Lévy*

$$\nu\left(dx\right)=x\mathbf{1}_{\{0<x<1\}}+\frac{1}{x^{6}}\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}},$$

(a) Calcule a variância do seguinte integral de Poisson

$$\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty}x^{2}N(5,dx),$$

e descreva o que representa este integral em termos de amplitudes de saltos do processo de Lévy no intervalo de tempo $[0,5]$.

(b) Considere que o processo X é solução da equação diferencial estocástica

$$dX_t=\left(m-X_{t-}\right)dt+\sigma dB_t+\int_{|x|\geq 1}xN\left(dt,dx\right),\qquad \text{com } X\left(0\right)=1.$$

Resolva esta equação (sugestão: Considere o processo $e^{t}X_t$ e aplique a fórmula de Itô de forma adequada).

Exercise 3.6 *Considere um integral estocástico do tipo Lévy*

$$\begin{aligned}dY(t)=&\,G\left(t\right)dt+F\left(t\right)dB\left(t\right)+\int_{|x|<1}H\left(t,x\right)\widetilde{N}\left(dt,dx\right)\\&+\int_{|x|\geq 1}K\left(t,x\right)N\left(dt,dx\right).\end{aligned}$$

(a) Deduza qual a condição (equação) que é necessário os processos $G(t)$, $F(t)$, $H(t,x)$ e $K(t,x)$ verificarem para que o processo $e^{Y(t)}$ seja uma martingala, justificando convenientemente.

(b) Usando a condição (equação) obtida em (a) verifique se $e^{Y(t)}$ é martingala para os seguintes processos:

(i) $Y(t)=-2t+4B\left(t\right)$.

(ii) $Y(t)=\int_0^t G(s)ds+\int_0^t K(s)dN\left(s\right)$, onde N é um processo de Poisson com intensidade λ e com medida de Lévy associada $\nu\left(dx\right)=\lambda\delta_1\left(x\right)$, especificando para o caso em que $G(s)=-\lambda\left(e-1\right)$ e $K(s)=1$.

Exercise 3.7 *Considere um processo de Lévy Z_t com características (μ, A, ν).*

(a) Enuncie a condição que a medida de Lévy ν deve satisfazer em geral e quais as condições que devem ser satisfeitas para que o processo:

(i) tenha trajectórias de variação finita.

(ii) tenha trajectórias de variação infinita.

(iii) tenha actividade infinita

(iv) seja um subordinador

(v) tenha momentos finitos de todas as ordens

(b) Considere que $\mu = 0$, $A = 0$ e

$$\nu (dx) = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.$$

Será que neste caso, o processo Z_t é um processo de Lévy? Justifique. Em caso afirmativo, que tipo de processo de Lévy? E qual o expoente característico associado a este processo e qual a função densidade de probabilidade da variável aleatória Z_1? Discuta ainda a "lei de decaimento" das caudas associadas a esta distribuição.

Exercise 3.8 *Considere o processo "Variance-Gamma" L_t*

(a) (i) Defina este processo usando um subordinador adequado e supondo que a distribuição "Variance Gamma" associada $V(\sigma, b, \theta)$ é tal que $\sigma = 1$ e $\theta = 0$. (ii) Defina também o mesmo processo mas usando dois subordinadores adequados e (iii) finalmente apresente a medida de Lévy associada ao processo, descrevendo brevemente como é o seu decaimento quando $x \to \infty$.

(b) Mostre que a função característica do processo é

$$\Phi_{L(t)} (u) = \mathbb{E} \left[e^{iuL(t)} \right] = \left(1 + \frac{u^2}{2b} \right)^{-at},$$

onde a e b são parâmetros adequados associados ao subordinador usado em (a).

Exercise 3.9 *Considere uma distribuição infinitamente divisível com características (m, A, ν).*

(a) Mostre que

$$\lim_{u \to 0} \left| \int_{-1}^{1} \left(e^{iyu} - 1 - iyu \right) \nu (dy) + \int_{\mathbb{R} \setminus (-1,1)} \left(e^{iyu} - 1 \right) \nu (dy) \right| = 0.$$

(b) Mostre que a distribuição exponencial com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$$

e função característica

$$\phi(u) = \frac{\theta}{\theta - iu}$$

é infinitamente divisível.

Sugestão: Note que a função característica de uma distribuição Gamma-(α, β) é $\phi(u) = \frac{1}{(1-iu/\alpha)^{\beta}}$.

Exercise 3.10 *Apresente 4 exemplos de processos de Lévy (todos diferentes) que sejam também martingalas e dado um processo de Lévy $Y(t)$ com expoente característico $\eta(u)$, mostre que o processo*

$$\exp\{iuY(t) - t\eta(u)\}$$

é também uma martingala.

Exercise 3.11 *Considere um mercado em que o preço do activo com risco S_t é modelado pela equação diferencial estocástica*

$$dS(t) = S(t-)\, dZ(t),$$

onde $Z(t) = \sigma X(t) + \mu t$ e $X(t)$ é um processo de Lévy com decomposição

$$X(t) = mt + kB(t) + \int_c^{+\infty} x\widetilde{N}(t, dx),$$

com $k \geq 0$, $m \geq 0$ e $c < -1$. Assuma que a taxa de juro sem risco é $r > 0$.

(a) Qual a condição que as constantes σ, μ, k, m e r devem satisfazer para que o processo de preço descontado do activo sem risco seja uma martingala relativamente a uma medida equivalente $\mathbb{Q}$? Explique também porque é que este modelo de mercado é, em geral, incompleto.

(b) Determine a condição anterior e discuta a completude do mercado nos casos em que:

(i) o processo X é um movimento Browniano $B(t)$;

(ii) $X = mt + B(t) + N(t)$, onde N é um processo de Poisson de intensidade λ e independente de B.

Exercise 3.12 *Seja $X(t)$ um processo integral estocástico do tipo Lévy com diferencial $dX(t) = \alpha(t)dt + \sigma(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \gamma(t,x)\widetilde{N}(dt,dx)$. Defina-se $Y(t) = \cos(X(t))$. Determine $a(t), b(t)$ e $c(t,x)$ tal que*

$$dY(t) = a(t)dt + b(t)dB(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} c(t,x)\widetilde{N}(dt,dx).$$