Função Geradora de Momentos

Tópicos de Inferência Estatística

José Passos

ISEG-ULisboa

10 de Outubro de 2019

A distribuição de uma v.a. X pode ser caracterizada pela,

- função densidade de probabilidade ou função probabilidade, $f(x)$
- função distribuição, $F(x)$
- função de quantis, $Q(p) = \inf_x\{x : F(x) \geq p\}$, com $0 < p < 1$
- função *hazard*, $h(x) = f(x)/S(x)$, com $S(x) = 1 - F(x)$
- função geradora de momentos, $M_X(t) = E(e^{tX})$
- função característica, é a transformada de Fourier da função densidade ou probabilidade, $\Phi_X(t) = E(e^{itX})$.

Definição: função geradora de momentos

Seja X uma v.a. que assume valores em χ com f.d.p. ou f.p. $f(x)$. Então a função geradora de momentos de X, $M_X(t)$, é definida por,

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) \\
&= \begin{cases} \int_{\chi} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ contínua} \\ \\ \sum_x e^{tx} f(x) & \text{se } X \text{ discreta} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Propriedades:

- $M_X(0) = 1$
- $M_X^{(k)}(0) = \mu_k = E(X^k)$
- $M_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\mu_k}{k!}t^k + \ldots$
- se X tem f.g.m. $M_X(t)$, a v.a. $Y = a + bX$ tem f.g.m. $M_Y(t) = e^{at}M_X(bt)$
- se X e Y são v.a. independentes com f.g.m. $M_X(t)$ e $M_Y(t)$, respectivamente, a soma $X + Y$ tem f.g.m. $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$
- se X e Y são v.a. com f.g.m. $M_X(t)$ e $M_Y(t)$ e f.d. $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, respectivamente, então $M_X(t) = M_Y(t)$ implica $F_X(x) = F_Y(x)$

- se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes com f.g.m. $M_{X_i}(t)$ então a combinação linear $L = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ tem f.g.m. $M_L(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_it)$
- se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1/n$, $L = \bar{X}$ e
  - $M_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t/n)$
  - $M_{\bar{X}}(t) = [M_X(t/n)]^n$ se os X_i são identicamente distribuidos.

Bibliografia

- Casella and Berger (2002), *Statistical Inference*, 2nd Edition, Duxbury (pags. 59-68).