

# Bootstrap

## Tópicos de Inferência Estatística

José Passos

ISEG-ULisboa

10 de Outubro de 2019



Um problema fundamental em estatística é conhecer a variabilidade de uma estatística:

- A inferência estatística assenta na distribuição por amostragem de uma estatística;
- A distribuição por amostragem de uma estatística é a distribuição da estatística em amostras repetidas da população;
- O bootstrap é particularmente interessante em situações onde não se conhece a população ou não é possível obter amostras repetidas dessa população;
- O bootstrap é uma técnica que nos permite conhecer a distribuição por amostragem, de forma aproximada, apenas a partir da amostra observada;
- O bootstrap permite-nos calcular o enviesamento, variância, intervalos de confiança, etc., de um estimador com base apenas na amostra observada.

- O bootstrap não-paramétrico trata a amostra como se fosse a população, considerando amostras repetidas (com reposição) a partir da amostra observada.
- A estimativa bootstrap de uma função da estatística pode ser vista como uma estimativa *plug-in* que usa a função de distribuição empírica,  $\hat{F}_n$ , no lugar de  $F$ .
- Suponha  $T_n = \bar{X}$ . Pretende-se calcular  $Var_F(T_n) = \sigma^2/n$  que é um funcional estatístico, função de  $F$ .
- Aproximar  $Var_{\hat{F}_n}(T_n)$  por simulação. Como se pode simular a partir da distribuição de  $T_n$  quando os dados têm distribuição  $\hat{F}_n$ ? A resposta consiste no seguinte:
  - simular  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  a partir de  $\hat{F}_n$ ;
  - calcular  $T_n^* = T(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$
- Portanto, simular  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \sim \hat{F}_n$  é equivalente a gerar  $n$  observações com reposição, a partir de  $X_1, X_2, \dots, X_n$

Algoritmo para a estimação bootstrap da variância e do enviesamento de uma estatística:

- 1 gerar  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \sim \hat{F}_n$
- 2 calcular  $T_n^* = T(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$
- 3 Repetir os passos 1 e 2,  $B$  vezes, obtendo  $T_{n,1}^*, T_{n,2}^*, \dots, T_{n,B}^*$
- 4 Fazer,

$$v_{boot} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left( T_{n,b}^* - \frac{1}{B} \sum_{r=1}^B T_{n,r}^* \right)^2$$

$$b_{boot} = \frac{1}{B} \sum_{r=1}^B T_{n,r}^* - T_n$$

Principal diferença:

- no bootstrap não-paramétrico gera-se  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  a partir da distribuição empírica,  $\hat{F}_n$ ;
- no bootstrap paramétrico,  $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$  é gerado a partir de  $F(x | \hat{\theta})$  onde  $\hat{\theta}$  é uma estimativa de  $\theta$  (por exemplo, máxima verosimilhança).

- Numa amostra de dimensão  $n$  existem  $n^n$  sub-amostras possíveis de dimensão  $n$ .
- Quantas amostras bootstrap são suficientes?
- Em geral são suficientes  $B = n(\log n)^2$  [Babu and Singh (1983)] sub-amostras.

# Situações em que o Bootstrap não funciona

- Distribuições com abas pesadas, por exemplo,  $\hat{\theta} = \bar{X}$  e  $E(X^2) = \infty$ .
- Estatísticas não-lisas (non-smooth), por exemplo,  $\hat{\theta} = \max\{X_i\}$ .
- Amostras dependentes.

- Babu & Singh (1983), Inference on Means Using the Bootstrap, *Annals of Statistics*, Volume 11, Number 3, 999-1003.
- Boos & Stefanski (2010), Efron's bootstrap, *Significance*, Volume 7, Issue 4, pp. 186-188
- Efron, B & Tibshirami, R. J. (1993), *An introduction to the bootstrap*, Chapman & Hall, New-York.
- Moore, D & McCabe, G (2005), *Introduction to the Practice of Statistics*, 5th Edition, W H Freeman & Co. [Chap. 14].