Cap 4. Funções reais de variável real: revisões e complementos.

4.1. Limites e continuidade

4.1.1. Conceitos básicos

- Def: Uma correspondência $f: A \to B$ é uma **função,** se associa a cada elemento $x \in A$ um e um só elemento $f(x) \in B$ (escreve-se $x \mapsto f(x)$).

  Domínio de uma função $f: A \to B$ é $D_f = \{x \in A: \ f(x) \text{ está bem definido}\}$;

  A cada elemento $x \in A$ chama-se **objeto** e ao correspondente $f(x) \in B$ chama-se **imagem** (ou **transformado**) de x;

  Contradomínio de uma função $f: A \to B$ é $CD_f = \{y \in B: \ \exists x \in A: f(x) = y\}$, isto é, CD_f é o conjunto de todas as imagens;

- Def (cont.) **Função real de variável real** é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Ex 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 5$ ou $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 3x + 5$ ou $f(x) = 3x + 5$

  $D_f = ?$

- Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  2) $f(x) = 2x^2 - 2$ $\quad D_f = ?$
  3) $f(x) = 1/x$ $\quad D_f = ?$
  4) $f(x) = \sqrt{x + 1}$ $\quad D_f = ?$
  5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad D_f = ?$
  6) $f(x) = |x|$ $\quad D_f = ?$

- Def: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  f é uma **função par** se $f(x) = f(-x),\ \forall x \in D_f$;

  f é uma **função ímpar** se $f(x) = -f(-x),\ \forall x \in D_f$;

  f é uma **função limitada** se CD_f for um conjunto limitado, ou seja,

  se $\exists m, M \in \mathbb{R}:\ m \le f(x) \le M,\ \ \forall x \in D_f$.

  f é uma função **crescente em A** $\subset D_f$ se $\forall a, b \in A, a < b \Rightarrow f(a) \le f(b)$

  f é uma função **decrescente em A** $\subset D_f$ se $\forall a, b \in A, a < b \Rightarrow f(a) \ge f(b)$

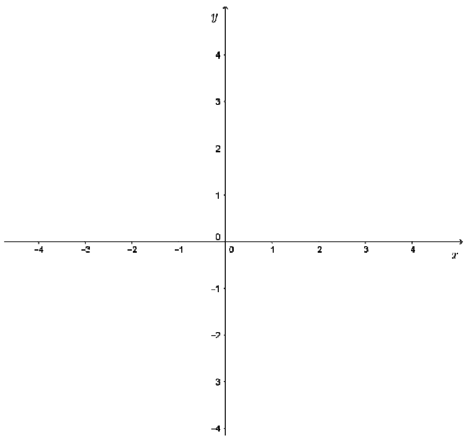
Ex

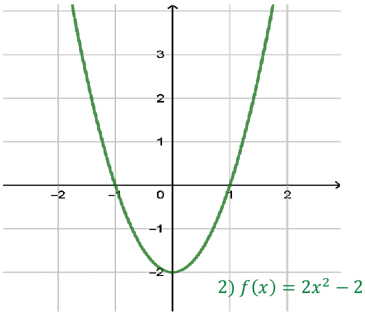
1) $f(x) = 3x + 5$
2) $f(x) = 2x^2 - 2$
3) $f(x) = 1/x$
4) $f(x) = \sqrt{x+1}$
5) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
6) $f(x) = |x|$

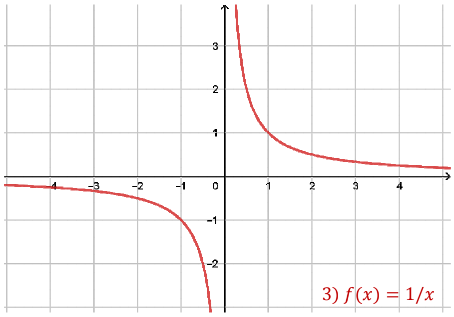
- Def: **Gráfico** de f é o conjunto

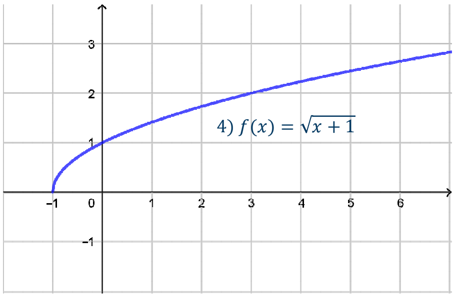
$$graf(f) = \{(x, y):\ x \in D_f\ \wedge\ y = f(x)\}$$
$$= \{(x, f(x)),\ x \in D_f\}$$

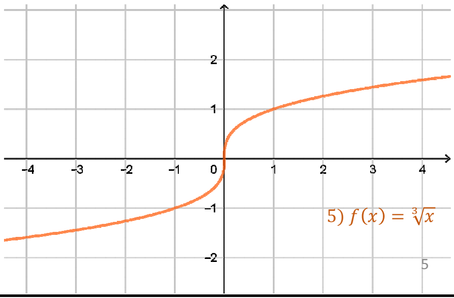
Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o gráfico de f pode ser representado no plano XY





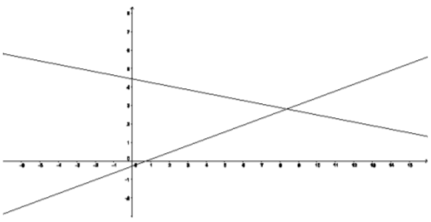


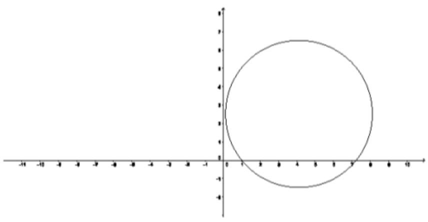




- 6) gráfico de $f(x) = |x|$

- Obs: As figuras abaixo não representam gráficos de funções





Função composta

- Def: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com domínio D_f e seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com domínio D_g.
  A composição de g com f, $g \circ f$ é a função definida por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ cujo domínio é
  $$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}.$$

- Ex: $f(x) = 1/x$ $g(x) = x^2 - 1$

  $(g \circ f)(x) =$ $D_{g \circ f} =$
  $(f \circ g)(x) =$ $D_{f \circ g} =$

- Obs: Em geral, $g \circ f \neq f \circ g$ (quando coincidem, diz-se que f e g são permutáveis).

Função inversa

- Def: Uma função $f: A \rightarrow B$ diz-se **injetiva** se $\forall a, b \in D_f,\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ (ou seja, se objetos diferentes têm imagens diferentes).

- Def: Seja $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se existir, a **função inversa** de f designa-se por f^{-1} e é a função tal que
  $$f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

- Prop: Qualquer função injetiva tem inversa e $D_{f^{-1}} = CD_f$.

- Exemplos:

1) Se $f(x) = e^x$ então $f^{-1}(y) = \ln y$,

2) Se $f(x) = \ln x$ então $f^{-1}(y) = e^y$,

3) Se $f(x) = x^3$ então $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$,

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = 3x + 5$
? A função f tem inversa?

5) E se $f(x) = x^2$, $f^{-1} = ?$
A função não é injetiva e, por isso, não tem inversa.
No entanto, se considerarmos a restrição de f a $\mathbb{R}_0^+$, $f|_{\mathbb{R}_0^+}$, isto é, $f|_{\mathbb{R}_0^+}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$
já existe inversa: $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

4.1.2 Funções simples e muito importantes

A) Funções polinomiais

1) $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$ polinómio de grau 1 (reta)
exemplos: $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3x - 1$, $h(x) = -3x + 1$, $l(x) = 3x$

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ polinómio de grau 2 (parábola)

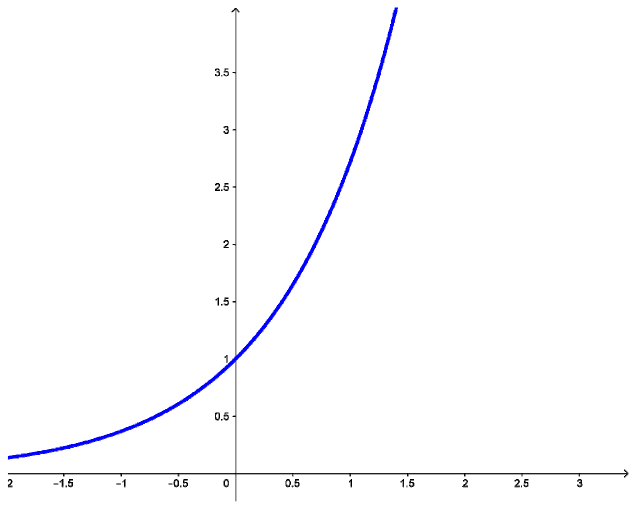
se $a > 0$, ...

se $a < 0$, ...

Obs: para esboçar o gráfico de funções polinomiais de grau ≥ 3,
é preciso fazer um estudo da função mais aprofundado.

B) Funções exponenciais

3) $f(x) = e^x$, (função exponencial de base e)



$D_f =$

$CD_f =$

monotonia:

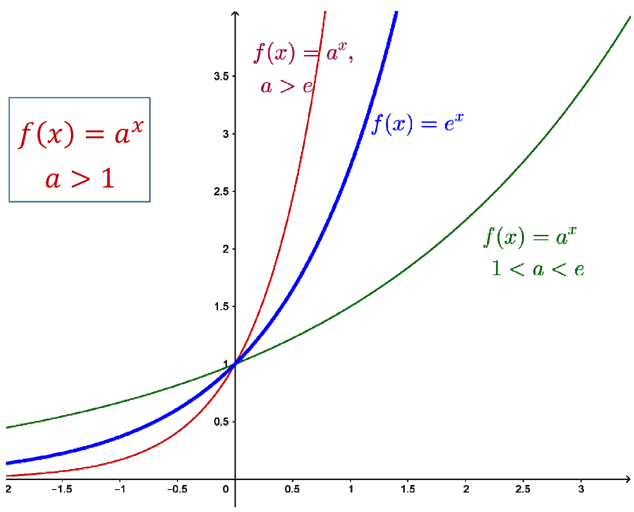
(0,1)

assintotas:

injetividade:

4) Outras funções exponenciais: exponencial de base a $(a > 1)$

$f(x) = a^x$
$a > 1$



$D_f =$

$CD_f =$

monotonia:

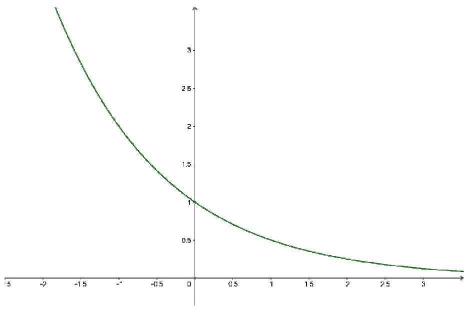
(0,1)

assintotas:

injetividade:

- Nota 1: $f(x) = a^x$ só está definida se $a > 0$;

se $0 < a < 1$



- Nota 2: a^x (função exponencial) $\neq$ x^a (função potência)

C) <u>Funções logaritmo</u>

- Def: A inversa da função exponencial é a função logaritmo, tendo-se

$$\ln(e^x) = x\;; \qquad e^{\ln x} = x$$

ou ainda, no caso geral,

$$\log_a(a^x) = x\;;\; a^{\log_a x} = x.$$

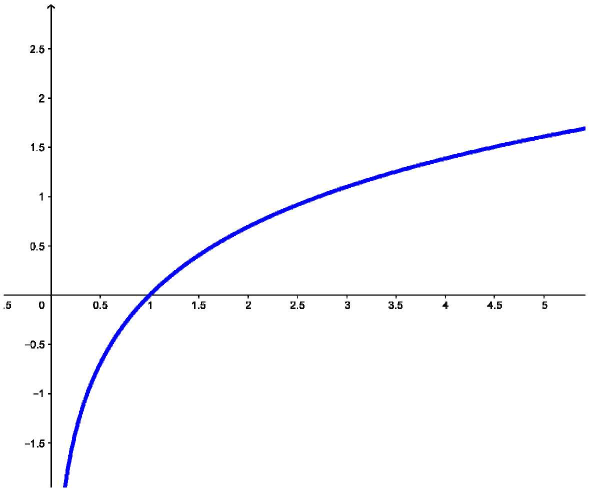
- Ex: $\log_2 8 = ?$

  $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

  $\log_2 1 =$

  $3^{\log_3 5} =$

5) $f(x) = \ln x$ (função logaritmo na base e)



$D_f =$

$CD_f =$

monotonia:

ponto:

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x$

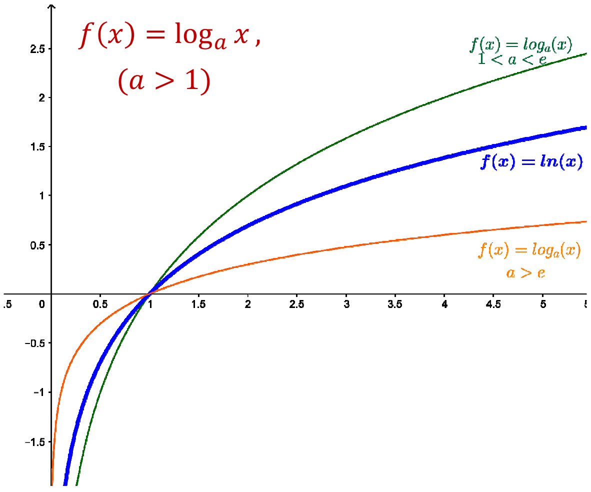
$\ln x < 0 \Leftrightarrow x$

fç injetiva

6) Outras funções logaritmo: logaritmo na base a (se $a > 1$)

$f(x) = \log_a x$,

$(a > 1)$



$D_f =$

$CD_f =$

monotonia:

ponto:

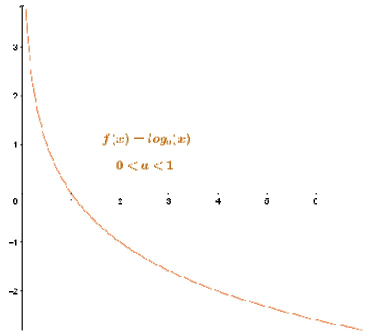
$\log_a x > 0 \Leftrightarrow x$

$\log_a x < 0 \Leftrightarrow x$

fç injetiva

- Nota: $f(x) = \log_a x$ só está definida se $a > 0$;

se $0 < a < 1$



- Propriedades (das funções exponencial e logaritmo):

1) $e^{c+d} = e^c \times e^d$; $\quad e^{c-d} = e^c / e^d$

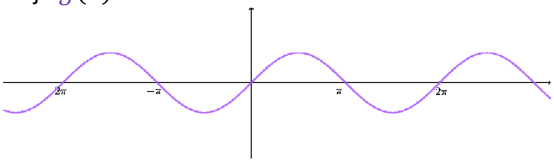
2) $\ln cd = \ln c + \ln d$, $\quad (c, d > 0)$
$\ln(c/d) = \ln c - \ln d$, $\quad (c, d > 0)$
$\ln(c^d) = d \ln c$, $(c > 0,\ \forall d \in \mathbb{R})$

3) $a^x = e^{x \ln a}$; $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

D. <u>Funções trigonométricas inversas</u>

1) $\boldsymbol{f(x) = \arcsin x}$

Seja $g(x) = \sin x$



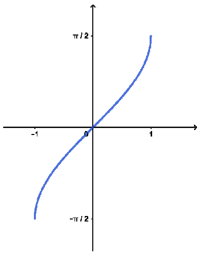
Não tem inversa em $\mathbb{R}$.

Mas a restrição de g a $[-\pi/2\,,\ \pi/2]$ já tem.

Se $\begin{aligned} g\colon [-\pi/2\,, \pi/2] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$ então

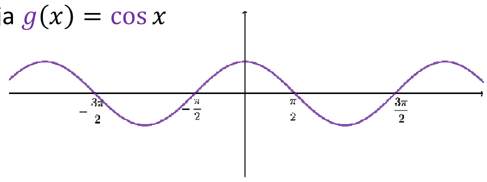
$\begin{aligned} g^{-1}\colon [-1,1] &\to [-\pi/2\,, \pi/2] \\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \arcsin y \end{aligned}$

Gráfico de $f(x) = arcsin\, x$:



2) $\boldsymbol{f(x) = \arccos x}$

Seja $g(x) = \cos x$



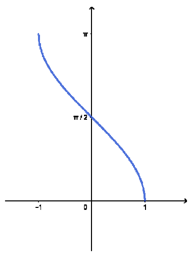
Não tem inversa em $\mathbb{R}$.

Mas a restrição de g a $[0, \pi]$ já tem.

Se $\begin{aligned} g\colon [0, \pi] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$ então

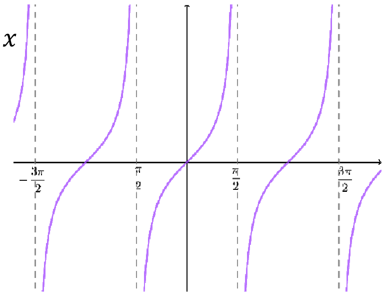
$\begin{aligned} g^{-1}\colon [-1,1] &\to [0, \pi] \\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \arccos y \end{aligned}$

Gráfico de $f(x) = arccos\, x$:



3) $\boldsymbol{f(x) = arctg\, x}$

Seja $g(x) = \text{tg}\, x$



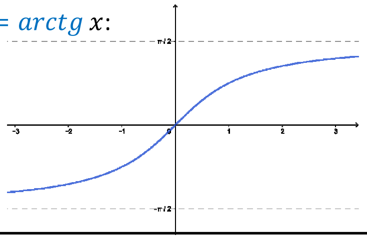
Não tem inversa em $\mathbb{R}$.

Mas a restrição de g a $]-\pi/2\,,\ \pi/2\,[$ já tem.

Se $\quad \begin{aligned} g:]-\pi/2\,,\ \pi/2\,[&\rightarrow [-1{,}1] \\ x &\mapsto \text{tg}\, x \end{aligned} \quad$ então

$$\begin{aligned} g^{-1}: [-1{,}1] &\rightarrow\ ]-\pi/2\,,\ \pi/2\,[\\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \text{arctg}\, y \end{aligned}$$

Gráfico de $f(x) = arctg\, x$:



§4.1.3. Limites. Continuidade

- Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de D_f e $b \in \mathbb{R}$.

  Def: (limite segundo Heine)

  $$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall (a_n) \subset \mathbb{R}, a_n \neq a\text{: } \lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = b$$

  Def: (limite segundo Cauchy)

  $$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\text{: } \big(x \in D_f \backslash \{a\} \wedge |x - a| < \varepsilon\big) \Rightarrow |f(x) - b| < \delta$$

  (o limite de $f(x)$ quando x tende para a (por valores diferentes de a) é o nº real b se qd x está suficientemente próximo de a, $f(x)$ está tão próximo quanto se queira de b)

- Ex1. $\quad f(x) = 3x + 5 \qquad\qquad \lim_{x \to 2} f(x) = ?$

- Ex2. $f(x) = \begin{cases} 3x+5, \text{se } x \neq 2 \\ 0 \qquad \text{se } x = 2 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x) = ?$

- Nota: 1) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x)$

- Ex3. $f(x) = \begin{cases} 3x+5, \ \text{se } x > 1 \\ 6x-1, \ \text{se } x \leq 1 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 1} f(x) = ?$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x) = ?$

- Nota 2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x);$ $\qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$

- Prop: Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de D_f e $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b.$$

- Ex4. $f(x) = \begin{cases} x+1, \ \text{se } x > 2 \\ 4, \qquad \text{se } x = 2 \\ x^2-1, \text{se } x < 2 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x) = ?$

- Ex5. $f(x) = \begin{cases} x+1, \ \text{se } x > 2 \\ 4, \qquad \text{se } x \leq 2 \end{cases}$ $\qquad \lim_{x\to 2} f(x) = ?$

- Limites notáveis:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^k}=+\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^k}{e^x}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0, \quad (k>0)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

- Def: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

  f é contínua em $x=a$ se $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

  (ou seja, se $a\in D_f$ **e** existir $\lim_{x\to a} f(x)$ **e** $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$);

  f é contínua em $A\subset D_f$ se f for contínua em todos os pontos de A.

- Exer. Para os exemplos 1 a 5, estude a continuidade de cada função nos pontos onde calculou o limite.

- Propriedades das funções contínuas:

1) $f(x) =$ polinómio em x
$f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$ são funções contínuas em todo o seu domínio;
$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

2) Se f e g forem funções contínuas no mesmo ponto a então
i) $f + g,\ f - g,\ f \times g$ são contínuas em a;
ii) f/g é contínua em a, se $g(a) \neq 0$;

3) A composição de funções contínuas é uma função contínua, nos pontos em que esteja definida.

4) (T. de Bolzano) Se f for contínua em $[a, b]$, então f toma todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

5) Teorema de Weierstrass

Toda a função contínua definida num conjunto compacto tem, nesse conjunto, valor máximo e mínimo.

- Ex: i) Estude a continuidade de $f(x) = \sqrt{e^x + x^2} - \ln(x+1)$ em todos os pontos do seu domínio;

  ii) Estude a continuidade das funções dos exemplos 1 a 5, em todos os pontos do seu domínio;

  iii) Modifique apenas um dos algarismos da função do exemplo 4, de modo a obter uma função contínua em todo o seu domínio

4.2. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

4.2.1. Derivadas. Regras de derivação

- Def: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in int(D_f)$.

  Se existir e for finito o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, então f é diferenciável em a e a derivada de f em a é o valor desse limite, isto é,

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- Teor: Se existir $f'(a)$, $f'(a)$ é único.

- Ex1: $f(x) = (x-1)^2$

  $f'(2) = ?$

- Def: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in int(D_f)$.

  $f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (derivada à direita, no ponto a)

  $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (derivada à esquerda, no ponto a).

- Prop: f é diferenciável em a se e só se $f'(a^+) = f'(a^-) = f'(a)$.

- Ex2: $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & se\ x \geq 0 \\ 1-x^2, & se\ x < 0 \end{cases}$ $\qquad f'(0) = ?$

- Ex3: $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & se\ x > 0 \\ 1-x, & se\ x \leq 0 \end{cases}$ $\qquad f'(0) = ?$

- Obs: Se f for diferenciável em a, existe uma reta que aproxima bem a função f numa vizinhança de a e cuja equação é

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

(equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$).

- Ex4: Qual a reta que melhor aproxima a função $f(x) = (x-1)^2$ numa vizinhança de $x = 2$?

- Prop: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in int(D_f)$. Se f for diferenciável em a então f é contínua em a.

- Obs: 1) Se f não for contínua em a então f não é diferenciável em a (contra–recíproco);

  2) Se f for contínua em a, nada se conclui sobre a diferenciabilidade de f em a (ex3 e ex2).

- Prop: As funções polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são diferenciáveis em todos os pontos do seu domínio e

  1) $c' =$, $c \in \mathbb{R}$
  2) $(mx+b)' =$ $m, b \in \mathbb{R}$
  3) $(x^k)' =$, $k \in \mathbb{Z}$
  4) $(e^x)' =$
  5) $(\ln x)' =$
  6) $(\sin x)' =$
  7) $(\cos x)' =$
  8) $(\operatorname{tg} x)' =$
  9) $(\operatorname{cotg} x)' =$
  10) $(\arcsin x)' =$
  11) $(\arccos x)' =$
  12) $(\operatorname{arctg} x)' =$ (para $x \in D_f$)

- Prop: Regras simples de derivação

Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $x \in int(D_f) \cap int(D_g)$. Então

1) $(cf(x))' = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}$

2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g^2(x)}$

- Prop: (Derivada da função composta)

Se g for diferenciável em a e f diferenciável em $b = g(a)$ então

$fog = f(g)$ é diferenciável em a e

$$(fog)'(a) = \left(f\left(g(x)\right)\right)'(a) = f'(b) \times g'(a) = f'\left(g(a)\right) \times g'(a)$$

Regras de derivação:

Obs: sendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$,

$u' = u'(x) = \frac{du}{dx}$

Função	Derivada
$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$
x^a, $\quad a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\text{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
a^x, $(a \in \mathbb{R}^+)$	$a^x \ln a$
$\log_a x$, $(a \in \mathbb{R}^+)$	$\frac{1}{x \ln a}$

Função	Derivada
$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$
u^a, $\quad a \in \mathbb{R}$	$au^{a-1}.u'$
e^u	$u'.e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin u$	$u'.\cos u$
$\cos u$	$-u'.\sin u$
$\text{tg}\, u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\text{cotg}\, u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\text{arctg}\, u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\text{arccotg}\, u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
a^u, $(a \in \mathbb{R}^+)$	$u'.a^u \ln a$
$\log_a u$, $(a \in \mathbb{R}^+)$	$\frac{u'}{u \ln a}$

4.2.2. Aplicações do conceito de derivada

- Regra de L'Hôpital (Cálculo de limites: indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$)

Sejam $a \in]b, c[$ e f e g duas funções diferenciáveis em $]b, c[$, exceto eventualmente em a.

Se

i) $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$,

ii) $g'(x) \neq 0, \forall x \neq a, x \in]b, c[$,

iii) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (L finito ou infinito) ,

então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L .$$

- Ex: 1) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\cos x - 1}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - x}$

- Obs: pode existir $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e não existir $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nesse caso, obviamente, não se pode aplicar a Regra de L´Hôpital.

- Ex: Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$.

- Extensões da Regra de L'Hôpital:
  1) a pode ser um extremo do intervalo $]b, c[$
  2) a pode ser substituído por $\pm\infty$
  3) a regra também é aplicável a indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$
  4) a regra pode ser aplicada sucessivamente.

- Ex: Calcule $a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

  $b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$

4.2.3. Derivadas de ordem superior

...

4.2.4 Aproximações lineares e aproximações polinomiais.
Fórmula de Taylor

- Aproximação linear de $f(x)$ em torno de $x = a$: **Vimos que**,
  se f for diferenciável em a, então existe uma reta (polinómio de grau1) que aproxima bem o gráfico de f numa vizinhança de $(a, f(a))$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Assim,

$$f(x) \approx \underbrace{f(a) + f'(a)(x - a)}_{\substack{aproximação\ linear\ de\ f,\\ numa\ vizinhança\ de\ a}}, \quad \forall x \in V_\varepsilon(a)$$

- Teor: Fórmula de Taylor

  Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto tal que existem todas as derivadas de f até à de ordem $n+1$ em $V_\varepsilon(a)$.

  Então,

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{polinómio\ de\ Taylor\ de\ ordem\ n\ em\ torno\ de\ x=a} + R_n(x)$$

  com $\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$

- Obs: $R_n(x)$ é o erro que se comete quando se substitui $f(x)$ pelo polinómio de Taylor de ordem n.

  A aproximação polinomial de ordem n da função f, em torno de $x = a$ é

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad \forall x \in V_\varepsilon(a).$$

- Ex: Escreva a aproximação quadrática $(n = 2)$ de $f(x) = \ln(1+x)$ em torno de $x = 0$.
- TPC: Escreva a fórmula de Taylor de ordem n, para $f(x) = e^x$, em torno de $x = 0$.
- Ex: Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3, para $f(x) = \frac{x+1}{x}$, em torno de $x = 1$.
- TPC

4.2.5. Teoremas fundamentais da diferenciabilidade

- Teorema de Lagrange (ou do valor médio)

  Seja $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.

  Então $\exists c \in]a,b[: \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Corolário: Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$.
  Se $f'(x) = 0, \ \forall x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.

- Prop: Seja $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.
  Se $f'(x) \geq 0, \ \forall x \in]a, b[$, então f é crescente em $[a, b]$;
  Se $f'(x) \leq 0, \ \forall x \in]a, b[$, então f é decrescente em $[a, b]$.

- Ex: Estude a monotonia das funções, em todos os pontos do seu domínio

  a) $f(x) = x^3 - 12x$

  b) $f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}$; Calcule também $f(-3)$ e $f(-\frac{3}{2})$.