Capítulo 4. Funções reais de variável real. Revisões e complementos

1. Esboce o gráfico das seguintes funções reais de variável real (sem usar máquina de calcular)
   a) $|x-3|$
   b) $|x|-3$
   c) x^2
   d) $(-x)^2$
   e) $4x^2$
   f) $-x^2$
   g) $3x^2$
   h) $x^2/4$
   i) x^2-4
   j) x^2+4
   k) $(x+4)^2$
   l) $(3-x)^2-10$
   m) $|x^2+2x|$
   n) $\begin{cases} -x+2, \text{se } x \leq -1 \\ \\ 2x+5, \text{se } x > -1 \end{cases}$
   o) $\begin{cases} -x+2, \text{se } x < 0 \\ \\ 2x+5, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
   p) $\begin{cases} x, \text{se } x > 1 \\ 2, \text{se } x = 1 \\ x^2, \text{se } x < 1 \end{cases}$
   q) $\begin{cases} x^2+2x, \text{se } x < -2 \\ 0, \qquad \text{se } x = -2 \\ |x+2|, \text{se } x > -2 \end{cases}$

2. Determine os domínios das seguintes funções
   a) x^2
   b) $\sqrt[3]{x+1}$
   c) $\sqrt[4]{x+1}$
   d) $\sqrt{x+1}+\frac{1}{x-3}$
   e) $\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{1-x}}{x}$
   f) $\sqrt{x^2+1}$
   g) $\sqrt{x^2-25}$
   h) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
   i) e^{x^2-1}
   j) $\ln(x^2-1)$
   k) $\left(\frac{1}{e}\right)^x$

l) $\ln(1-|x-1|)$
m) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
n) $\sqrt{e^{x^2}-1}$
o) $\sqrt{|x-2|-4}$
p) $\frac{1}{\ln x}$
q) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{1-\ln x}$
r) $\frac{\ln\frac{1}{e^x}}{x^2-1}$
s) $\frac{2x^4-3x+1}{x^2+2x-2}$
t) $\frac{x^5}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$
u) $\ln(x^2)$

3. Calcule, caso existam, os seguintes limites

a) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$
b) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$
c) $\lim_{x\to +\infty} \sin\frac{1}{x}$
d) $\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$
e) $\lim_{x\to 0} \frac{2x-1}{x}$
f) $\lim_{x\to 0} \frac{3x+1}{x-1}$
g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\cos(3x)}{x}$
h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$
i) $\lim_{x\to +\infty} 3x^2-2x+7$
j) $\lim_{x\to -\infty} 3x^2-2x+7$
k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3+x-3}{-x^3-x^2-1}$
l) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3+x-3}{-x^3-x^2-1}$
m) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-3x^3+2x}{x^2-1}$
n) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^3+2x}{x^2-1}$
o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^4-1}{-x^5+3x}$
p) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^4-1}{-x^5+3x}$
q) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x(x^2-1)}{x^2(2x+3)}$
r) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+3x}{x^2+6x+9}$

s) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x-2}$

t) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$

u) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-e^{3(x-2)}}{x-2}$

v) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x+|x|}{x}$

w) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x+|x|}{x}$

x) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+|x|}{x}$

y) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+|x|}{x}$

z) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$

aa) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3}$

bb) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\frac{2+3x}{x-1}}$

cc) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x}$

4. Estude a continuidade das seguintes funções, nos pontos indicados

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \le 1 \\ (x-2)^2+1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, em $x = 1$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & \text{se } x < -1 \\ 3x, & \text{se } x \ge -1 \end{cases}$, em $x = -1$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ 3, & \text{se } x = 0 \\ x+2, & \text{se } x < 0 \end{cases}$, em $x = 0$

d) $k(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & \text{se } 0 < x \le 1 \\ \frac{\ln x}{e^x-1}, & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$, em todo o seu domínio

5. Determine, caso existam, os valores de a e de b que tornam contínuas as seguintes funções, nos pontos indicados

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-7, & \text{se } x \ge 3 \\ ax+3, & \text{se } x < 3 \end{cases}$, em $x = 3$

b) $g(x) = \begin{cases} x + a, & \text{se } x < -2 \\ 3ax + b, & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ ax + 7, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, em $x = -2$ e em $x = 1$

c) $h(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \neq 0 \\ ax + b, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, em $x = 0$

d) $l(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x, & \text{se } x \neq 0 \\ a, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, em $x = 0$

6. Calcule a função derivada de cada uma das seguintes funções

a) 5

b) $2x^5$

c) $(2x)^5$

d) π^7

e) x^{-7}

f) x

g) $\frac{-2}{x^2}$

h) $\sqrt{x}$

i) $\frac{3}{\sqrt{x}}$

j) $\frac{-2}{x\sqrt{x}}$

k) $\sqrt{x^3}$

l) $\sqrt[3]{x^2}$

m) $x + x^2 + 7\sin x$

n) $6\cos x - 3x^5 + 2x^4 + 5$

o) $8x^4 + 2\sqrt{x} + 4\ln x$

p) $5 - 7\,tgx - 2e^x$

q) $(2x^2 - 1)(x^4 - 1)$

r) $\frac{x+1}{x-1}$

s) $\frac{x+1}{x^5}$

t) $(3x + 1)\frac{2}{x^2}$

u) $(x^3 + x^2)^{50}$

v) $\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$

w) $(x^2 + 7)^2$

x) $(3x - 4)^{-7}$

y) $\sqrt{x^3 + 1}$

z) $(1 - x^2)^{33}$

7. Calcule $\frac{df}{dx}$, sendo $f(x)$ definida por

a) $5e^x$

b) e^{-3}

c) e^{-3x}

d) $2e^{x^3}$

e) $x\ln x$

f) $e^{1/x}$

g) $5e^{2x^2-3x+1}$

h) $(e^{x^3} - 1)^{1/3}$

i) $e^x \ln x$

j) $\ln x^2$

k) $(\ln x)^2$

l) $\frac{e^x}{e^x+1}$

m) 5.3^x

n) $\sin 2x$

o) $\sin^2 x + \cos^2 x$

p) $x \cos x$

q) $\operatorname{tg} x^2$

r) $\frac{\cos x}{\sin x}$

s) $1 - \cos(3x)$

t) $\arcsin 2x$

u) $\operatorname{arctg}(3x^2)$

v) $\arccos(2x^3)$

8. Calcule $\frac{dy}{dx}$, sendo y definido por

a) $\ln|x|$

b) $\ln(\cos x)$

c) $\cos(3x^2 - ax)$, $a \in \mathbb{R}$

d) $\cos^2 x$

e) $\arccos(2x^2)$

f) $\operatorname{arctg}(2x + 4)$

g) $\ln(\ln(x^3))$

h) $\sin x \cos x$

i) e^{x^2}

j) $\ln(e^{3x} + x^2)$

k) 5^{3x}

l) $\log_2(10x)$

9. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de $y = \frac{1}{x}$,
   a) no ponto de abcissa $x = 3$
   b) no ponto de abcissa $x = 1$
   c) no ponto de abcissa $x = -2$.

10. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x > 0 \\ x^3 + 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.
    a) Estude a diferenciabilidade de f em $x = 0$.
    b) Determine a função derivada de f, nos pontos em que existe.
    c) Determine uma equação da reta tangente a $y = f(x)$ no ponto de abcissa $x = 0$.

11. Seja$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{e^x - 1}, \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$.
    a) Indique o domínio de f.
    b) Estude a continuidade de f em $x = 1$.
    c) Estude a diferenciabilidade de f em $x = 1$. O que pode afirmar sobre a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1)$?

12. Estude a continuidade e diferenciabilidade de $f(x) = |x - 3|$ em $x = 3$.

13. Calcule os seguintes limites

    a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x}$
    b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$
    c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$
    d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x}$
    e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos(3x)}{x}$
    f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln x$
    g) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$
    h) $\lim\limits_{x \to 0^+} x e^{1/x} - x$
    i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(5/x)}{2/x}$

j) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \frac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\sin x-\cos x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(\mathrm{tg}(x))}$

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

14. Estude a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\ln(x+1)}, & \text{se } x > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0\,, \\ \frac{e^x-1}{1-\cos x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$.

15. Seja $f(x) = \sqrt{x}$.
   a) Escreva a aproximação linear à função f em torno de $x = 1$.
   b) Use a alínea anterior para calcular um valor aproximado de $\sqrt{1{,}1}$.
   c) Escreva a aproximação quadrática de Taylor à função f em torno de $x = 1$.
   d) Use a alínea anterior para calcular um valor aproximado de $\sqrt{1{,}1}$.
   e) Compare os resultados obtidos nas alíneas b) e d) com o valor exato de $\sqrt{1{,}1}$ (pode usar máquina de calcular, ou folha de cálculo, para obter este valor exato).

16. a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n da função $f(x) = e^{-x}$, em torno de $x = 0$.
   b) Calcule um valor aproximado de $1/e$, usando a aproximação quadrática relativa à alínea anterior.

17.

a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 da função $f(x) = \ln x$, em torno de $x = 1$ e use-a para calcular um valor aproximado de $\ln(1{,}2)$.

b) Compare o valor aproximado obtido na alínea anterior com o valor exato de $\ln(1{,}2)$ (pode usar máquina de calcular, ou folha de cálculo, para obter este valor exato).

18. Determine, caso existam, os pontos críticos das seguintes funções e classifique-os (usando as derivadas de ordem superior)

a) $f(x) = x^2 + 2x$
b) $f(x) = x^2(x-1)^2$
c) $f(x) = x^2e^{-x^2}$
d) $f(x) = x^4e^x$
e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$