

Cálculo e Instrumentos Financeiros

Anuidades/Rendas Certas

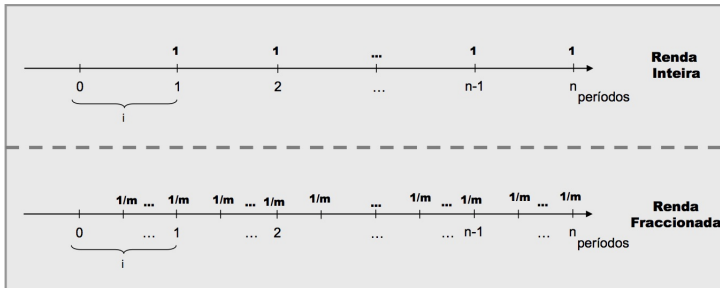
Alfredo D. Egidio dos Reis



3. Anuidades ou Rendas Certas

- 3.1 Conceitos e classificação;
- 3.2 Valor actual e valor acumulado;
- 3.3 Rendas com termos constantes e normais;
- 3.4 Rendas com termos antecipados;
- 3.5 Rendas diferidas;
- 3.6 Rendas perpétuas;
- 3.7 Rendas com termos variáveis;
- 3.8 Aplicações.

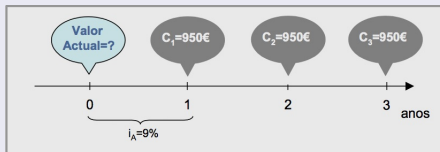
- a) **Inteiras:** Quando o **período da taxa** e o **período da renda** coincidem.
- b) **Fraccionadas:** Período da taxa superior ao período da renda.
 Ex.: Empréstimos à habitação, taxa anual e prestações mensais



- Muitas vezes, queremos saber o **valor actual** de uma renda, no *momento 0*.
- Idem, o **valor acumulado** no final do prazo.
- Por vezes também, valores intermédios.

Exemplo (Ex. 3.1)

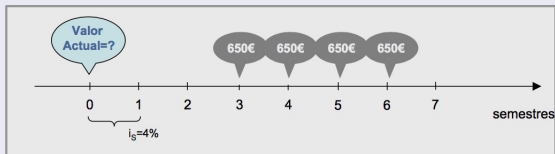
O João comprou um iPad, pagável em três prestações anuais de 950,00€ cada (inclui juros). Taxa de 9% ao ano. Se o João quisesse pagar o iPad, na sua totalidade, no momento da compra, quanto deveria ter desembolsado?



Exemplo (Ex. 3.4)

O Tomás comprou um computador, pagável em 4 prestações semestrais de €650,00 cada (no final de cada sem. incl. juros). 1º pagamento daqui a 3 semestres, financiamento da compra à taxa de 4% ao semestre.

Se pretender pagar a pronto, quanto deveria desembolsar?



$$V.A. = 2|a_{\overline{4}|4\%} 650 = 650 a_{\overline{4}|0.04} (1.04)^{-2} = 2181.43\text{€}$$

Renda perpétua. Valor Actual: $a_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n|i}$

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$

Nota:

$$a_{n|i} < a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$

Renda perpétua anticipada. Valor Actual: $\ddot{a}_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{a}_{n|i}$

$$\ddot{a}_{n|i} = 1 + a_{n-1|i}$$

$$\ddot{a}_{\infty|i} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1|i} = 1 + \frac{1}{i}$$

- Se os termos são variáveis e sem qualquer *padrão matemático* calcula-se o valor actual/acumulado somando um a um os valores actuais ou acumulados.
- Se os termos variarem em progressão, aritmética ou geométrica, é possível abreviar o cálculo.

Termos em progressão aritmética crescente:

Exemplo (Ex. 3.7)

O João comprou um computador pagável em 3 prestações normais anuais, de €950, €1000 e €1050 (inc. juros). O crédito é financiado à taxa de 9% ao ano. A quanto pagaria?

$$\begin{aligned}
 V.A. &= 950,00(1,09)^{-1} + 1000,00(1,09)^{-2} + 1050,00(1,09)^{-3} \\
 &= 2524,03€
 \end{aligned}$$

Exemplo (Ex. 3.7, cont.)

Progressão aritmética crescente com razão $h = 50$.

V. Actual =

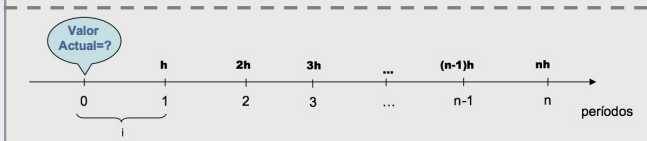
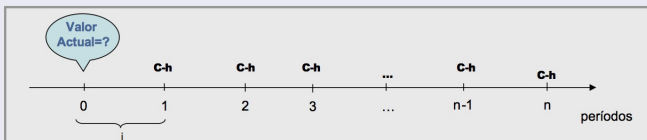
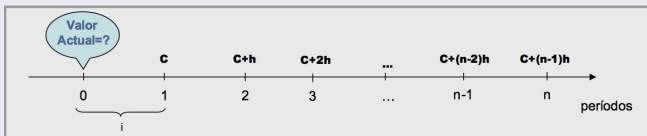
$$= 950,00(1,09)^{-1} + 1000,00(1,09)^{-2} + 1050,00(1,09)^{-3} = 2524,03\text{€}$$

$$\begin{array}{r}
 = 900(1,09)^{-1} + 900(1,09)^{-2} + 900(1,09)^{-3} + \\
 + 50(1,09)^{-1} + 50(1,09)^{-2} + 50(1,09)^{-3} + \\
 + 50(1,09)^{-2} + 50(1,09)^{-3} + \\
 + 50(1,09)^{-3} = 2524,03\text{€}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 = 900a_{\overline{3}|9\%} + \\
 + 50a_{\overline{3}|9\%} + 50_{1|}a_{\overline{2}|9\%} + 50_{2|}a_{\overline{1}|9\%} = 2524,03\text{€}
 \end{array}$$

$$= 2524,03\text{€}$$

Progressão aritmética crescente com razão h



Progressão aritmética crescente com razão h , Valor Actual:

$$= Cv + (C + h)v^2 + (C + 2h)v^3 + \dots + [C + (n - 1)h]v^n$$

$$= (C - h)v + (C - h)v^2 + (C - h)v^3 + \dots + (C - h)v^n + hv + 2hv^2 + 3hv^3 + \dots + (n - 1)hv^{n-1} + nhv^n$$

$$= \begin{array}{ccccccc} (C - h)v & + & (C - h)v^2 & + & (C - h)v^3 & + & \dots & + & (C - h)v^n & + \\ & +hv & & +hv^2 & & +hv^3 & & +\dots & +hv^{n-1} & + & hv^n & + \\ & & +hv^2 & & +hv^3 & & +\dots & +hv^{n-1} & + & hv^n & + \\ & & & +hv^3 & & +\dots & +hv^{n-1} & + & hv^n & + \\ & & & & \dots & & \dots & & \dots & + \\ & & & & & & +hv^{n-1} & + & hv^n & + \\ & & & & & & & + & hv^n & = \end{array}$$

$$= (C - h)a_{\overline{n}|i} + h(a_{\overline{n-1}|i} + a_{\overline{n-2}|i} + \dots + a_{\overline{1}|i})$$

$$= (C - h)a_{\overline{n}|i} + h.(Ia)_{\overline{n}|i}$$

Renda com termos em progressão aritmética crescente

$$\begin{aligned}
 &= (C - h) a_{\overline{n}|i} + h (a_{\overline{n}|i} +_1 | a_{\overline{n-1}|i} +_2 | a_{\overline{n-2}|i} + \dots +_{n-1} | a_{\overline{1}|i}) = \\
 &= (C - h) a_{\overline{n}|i} + \mathbf{h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (Ia)_{\overline{n}|i} &= a_{\overline{n}|i} +_1 | a_{\overline{n-1}|i} +_2 | a_{\overline{n-2}|i} + \dots +_{n-1} | a_{\overline{1}|i} \\
 &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}
 \end{aligned}$$

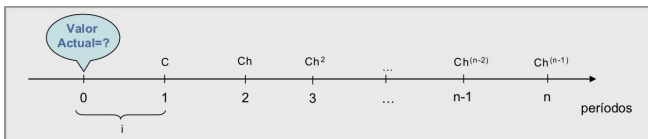
- Se $C = h$: Valor Actual = $h \cdot (Ia)_{\overline{n}|i}$

Termos em progressão geométrica

Exemplo (Ex. 3.9)

O João comprou um computador, pagável em três prestações anuais (c/ juros incl.), sendo a 1ª igual a €950 e as restantes com um acréscimo de 25% relativamente à anterior. Taxa de juro anual constante, $i_A = 9\%$. Valor Actual:

$$\begin{aligned}
 V.A. &= 950(1,09)^{-1} + 950 \times 1.25(1,09)^{-2} + 950 \times 1.25^2(1,09)^{-3} \\
 &= 3017,26\text{€}
 \end{aligned}$$



- 1º termo C , razão h .
- Se $h > 1$, a renda é crescente;
- Se $0 < h < 1$, renda é decrescente.
- V. Actual: Soma da progressão geométrica de razão hv ,

$$\begin{aligned}
 \text{V.A.} &= Cv + Chv^2 + Ch^2v^3 + \dots + Ch^{n-1}v^n \\
 &= C \frac{v - h^{n-1}v^n \times hv}{1 - hv} = C \left(\frac{v(1 - h^n v^n)}{v(1/v - h)} \right) \\
 &= C \left(\frac{1 - \left(\frac{h}{1+i}\right)^n}{1 + i - h} \right), \quad h - i \neq 1.
 \end{aligned}$$

Muitas vezes, na literatura financeira aparece $h = 1 + g$,
 ($h > 0 \Leftrightarrow g > -1$), g é uma taxa de crescimento. Nesse caso:

1º termo C , razão $h = (1 + g)$

$$\text{V.A.} = C \left(\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i} \right)^n}{i - g} \right), \quad g \neq i.$$

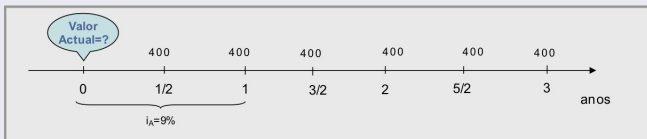
Nota: Se $g = i$

$$\begin{aligned} \text{V.A.} &= Cv + C(1+i)v^2 + C(1+i)^2v^3 + \dots + C(1+i)^{n-1}v^n \\ &= C(v + v + v + \dots + v) \\ &= \frac{C \times n}{1+i}, \quad \text{com } v = (1+i)^{-1}. \end{aligned}$$

Renda Fraccionada

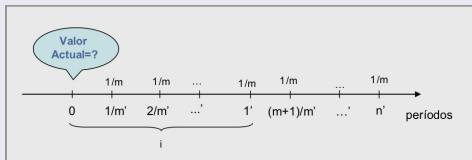
Renda em que o Período da taxa superior é ao Período da renda

Exemplo



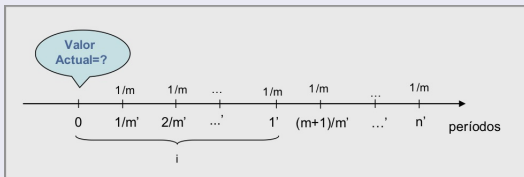
Renda fraccionada, com sub-divisão m

Período c / termo 1, é sub-dividido em m sub-períodos e termo $1/m$:



Renda fraccionada, com sub-divisão m

Cada Período $c/$ termo $\underline{1}$, é sub-dividido em \underline{m} sub-períodos e termo $1/m$:



- O período da taxa mantém-se, seja i_A (como se fosse o ano).
- A renda tem $n \times m$ termos, cada termo $1/m$
- Valor Actual, $a_{\overline{n}|i}^{(m)}$ (prog. geométrica com razão $v^{1/m}$):

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{1/m} + \frac{1}{m}v^{2/m} + \frac{1}{m}v^{3/m} + \dots + \frac{1}{m}v^n$$

V.A. (Soma de uma progressão geométrica com razão $v^{1/m}$)

$$\begin{aligned}
 a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= \frac{1}{m} v^{1/m} + \frac{1}{m} v^{2/m} + \frac{1}{m} v^{3/m} + \dots + \frac{1}{m} v^n \\
 &= \frac{1}{m} \left(\frac{v^{1/m} - v^n \times v^{1/m}}{1 - v^{1/m}} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{v^{1/m} (1 - v^n)}{v^{1/m} (v^{-1/m} - 1)} \right) \\
 &= \frac{1}{m} \left(\frac{1 - v^n}{v^{-1/m} - 1} \right) = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{m [(1+i)^{1/m} - 1]} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i^{(m)}}
 \end{aligned}$$

Como $i^{(m)} = m [(1+i)^{1/m} - 1]$, tx nominal anual convertível ...

$$\begin{aligned}
 a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right) = a_{\overline{n}|i} \left(\frac{i}{i^{(m)}} \right) \\
 T a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= T a_{\overline{n}|i} \left(\frac{i}{i^{(m)}} \right); \quad T s_{\overline{n}|i}^{(m)} = T s_{\overline{n}|i} \left(\frac{i}{i^{(m)}} \right).
 \end{aligned}$$

Em resumo:

Método 1

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} \left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) = a_{\overline{n}|i} \left(\frac{i}{i^{(m)}} \right) \\T a_{\overline{n}|i}^{(m)} &= T a_{\overline{n}|i} \left(\frac{i}{i^{(m)}} \right); \quad T s_{\overline{n}|i}^{(m)} = T s_{\overline{n}|i} \left(\frac{i}{i^{(m)}} \right).\end{aligned}$$

Podemos calcular a taxa equivalente à sub-subdivisão $1/m$:

Método 2

$$\begin{aligned}T a_{\overline{n}|i_A}^{(m)} &= \frac{T}{m} a_{\overline{m \times n}|i_m} \\(1+i_A) &= (1+i_m)^m \Leftrightarrow (1+i_A)^{1/m} = (1+i_m).\end{aligned}$$

Exemplo (Ex. 3.10)

Dívida pagável em 3 anos, 800€/ano, em 6 prestações semestrais normais de 400€ cada. Calcule o V. Actual, $i_A = 0.09$.

- ① Transformar a taxa anual em tx. equiv. semestral e:

$$i_S = (1 + i_A)^{1/2} - 1 = 0,044031;$$

$$\text{V.A.} = 400 a_{\overline{2 \times 3}|i_S} = 400 \frac{1 - 1,044031^{-6}}{0,044031} = 2069,62\text{€}$$

- ② Fazer o cálculo como renda fraccionada, $i_A^{(2)} = 0,088061$:

$$\text{V.A.} = 800 a_{\overline{3}|i_A^{(2)}} = 800 \frac{1 - 1,09^{-3}}{0,09} \frac{0,09}{0,088061} = 2069,62\text{€}$$

- ③ Qualquer dos métodos é bom, utiliza-se o que for mais rápido/eficiente.

Calcular o saldo **durante** o prazo de um empréstimo com Prestações constantes, T , prazo n , momento $k : 0 \leq k \leq n$:

Método prospectivo

Calcular o valor actual, em k , dos pagamentos restantes:

$$C_k = T a_{\overline{n-k}|i}$$

Método retrospectivo

Calcular a diferença, em k , entre o valor do empréstimo concedido e os pagamentos efectuados:

$$C_k = C_0(1+i)^k - T s_{\overline{k}|i}$$

Exemplo (**Avaliação de Participações**. Um modelo elementar)

Uma Acção/Quota é uma participação no capital de uma empresa. Quanto vale para ser transacionado? Um valor (especulativo) da bolsa de valores, se for cotado.

- O detentor de uma Acção tem como contrapartida, enquanto detentor, o(s) dividendo(s) que pode gerar anualmente. Depois... poderá sempre negociar...
- Hipóteses (simplistas):
 - 1 O dividendo no próximo ano estimou como sendo k ;
 - 2 Estima uma tx de crescimento anual do dividendo, r ; A tx de juro para actualização é i .
- Valor Actual (*Preço teórico da Acção*) de perpetuidade:

$$\text{V.A.} = k \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1+r}{(1+i)^2} + \frac{(1+r)^2}{(1+i)^3} + \dots \right] = \frac{k}{i-r}, \quad i > r$$

Exemplo (Ex. 7.1. V:A.L.- Valor Actual Líquido de investimento)

A empresa de cortiças ABCork está a ponderar efectuar um investimento numa nova linha de montagem, cujo investimento global ascende a €207 500, e que terá uma vida útil estimada de 8 anos.

Tendo em consideração as previsões efectuadas quanto às receitas e despesas de exploração que aquela nova linha produtiva irá registar, pretende-se analisar financeiramente este projecto de investimento através do método do VAL, utilizando a taxa de actualização de 6%, de forma a tomar uma decisão quanto à implementação ou abandono do projecto.

Exemplo (Ex. 7.1, V.A.L.(cont.))

Anos	Investimento (I _k)	Receitas de Exploração (R _k)	Despesas de Exploração (D _k)	Valor Residual do Investimento (V _r)
0	207 500,00 €	-	-	-
1	-	35 000,00 €	12 500,00 €	-
2	-	49 000,00 €	15 600,00 €	-
3	-	52 000,00 €	16 400,00 €	-
4	-	56 000,00 €	17 500,00 €	-
5	-	64 000,00 €	19 000,00 €	-
6	-	65 000,00 €	19 300,00 €	-
7	-	67 000,00 €	19 800,00 €	-
8	-	69 000,00 €	20 500,00 €	77 500,00 €

$$VAL = -Investimento + VA\ Cash - FlowsAcum. + V.R.$$

$$VAL = -207500 + 239001,9 + 77500(1,06)^{-8} = 80133,60 (>0)$$

3. Rendas Certas

- 3.1 Conceitos e classificação;
- 3.2 Valor actual e valor acumulado;
- 3.3 Rendas com termos constantes e normais;
- 3.4 Rendas com termos antecipados;
- 3.5 Rendas diferidas;
- 3.6 Rendas perpétuas;
- 3.7 Rendas com termos variáveis;
- 3.8 Aplicações.