Departamento de Matemática
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão
Matemática II - 2º Semestre - 2018/2019

Teste Intercalar: 11 de abril de 2019: Duração: 1h10m - **Tópicos de Resolução**

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

   (a) Calcule o valor de α para o qual $(1,2,0)$ é vetor próprio de A.

Resolução: *Relembre que $\overline{u}$ é vetor próprio de A se e só $\overline{u} \neq \overline{0}$ e $A\overline{u} = \lambda\overline{u}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Assim, $(1,2,0)$ é vetor próprio de A se e só se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, para que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ temos que ter

$$\lambda = 1 \text{ e } 1+2\alpha = 2, \quad \text{ou seja} \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

   (b) Classifique, em função do valor de α, a forma quadrática $Q(\overline{x}) = \overline{x}^T A\overline{x}$, com $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$.

Resolução: Como A é simétrica podemos classificar a forma quadrática pela cadeia de menores principais primários de A. Assim, como

$\Delta_1 = -1 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha - 1$ e

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+1)(-\alpha-1) = -(\alpha+1)^2 < 0, \forall \alpha \neq -1,$

se $-\alpha - 1 > 0$ ($\Leftrightarrow \alpha < -1$) temos $\Delta_2 > 0$, logo $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ e $\Delta_3 < 0$ e portanto a forma quadrática é definida negativa;

se $-\alpha - 1 < 0$ ($\Leftrightarrow \alpha > -1$) temos $\Delta_2 < 0$, logo $\Delta_1 < 0, \Delta_2 < 0$ e $\Delta_3 < 0$ e portanto a forma quadrática é indefinida.

2. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\ln\left(4 - (x-1)^2 - y^2\right)}{y - |x|}.$$

   (a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

Resolução:
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - (x-1)^2 - y^2 > 0 \wedge y \neq |x|\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 4 \wedge y \neq |x|\}.$

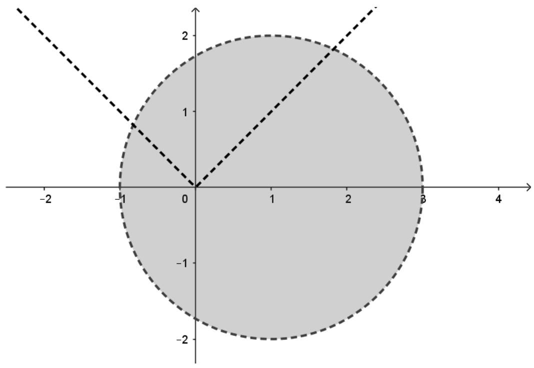

Figura 1: Gráfico do exercício 2a)

(b) Defina analíticamente o interior e a fronteira do conjunto D_f.

Resolução:
$int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 4 \wedge y \neq |x|\} = D_f$.
$fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 4|\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{se } x = y \end{cases}$.

(a) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0,0)$.

Resolução:
Uma função f é contínua em $(0,0)$ se e só se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e é igual a $f(0,0)$. Assim, como no nosso caso $f(0,0) = 1$, para mostrar que a função dada é contínua em $(0,0)$ temos que provar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1.$$

Considerando os conjuntos $B_1 = \{(x,y) \in R^2 : x = y\}$ e $B_2 = \{(x,y) \in R^2 : x \neq y\}$ temos que $\mathbb{R}^2 = B_1 \cup B_2$ e $(0,0) \in ad(B_1) \cap ad(B_2)$. Logo, para que f seja contínua no ponto $(0,0)$ é necessário e suficiente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|B_1}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_{|B_2}(x,y) = 1.$$

Como $f_{|B_1}(x,y) = 1$ obtemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{|B_1}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$.

Visto que $f_{|B_2}(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2}$ para provar a continuidade de f no ponto $(0,0)$ resta-nos provar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2} = 1$. Considerando que

$$0 \leq \left| \frac{x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2} - 1 \right| = \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|y|y^2}{x^2+y^2} \leq_* |y|$$

* porque $y^2 \leq (x^2+y^2)$.

e que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2} = 1$.

(b) Mostre que a função f admite derivada no ponto $(0,0)$ segundo qualquer vetor (v_1, v_2) e calcule-a.

Resolução:

$$\partial_{(v_1,v_2)} f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv_1, 0+hv_2) - f(0,0)}{h}$$

$$= \begin{cases} \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{(hv_1)^2+(hv_2)^2+(hv_2)^3}{(hv_1)^2+(hv_2)^2} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^3 v_2^3}{h^3(v_1^2+v_2^2)} = \dfrac{v_2^3}{v_1^2+v_2^2} & \text{se } v_1 \neq v_2 \\ \lim_{h\to 0} \dfrac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0 & \text{se } v_1 = v_2 \end{cases}$$

(c) Indique o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e de $\partial_{(1,1)} f(0,0)$. *(Sugestão: utilize o resultado que obteve na alínea b)).*

Resolução:
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \partial_{(1,0)} f(0,0) =_{b)} \frac{0^3}{1^2+0^2} = 0;$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \partial_{(0,1)} f(0,0) =_{b)} \frac{1^3}{0^2+1^2} = 1;$
$\partial_{(1,1)} f(0,0) =_{b)} 0;$

(d) Utilize os resultados obtidos na alínea c) para mostrar que a função f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Resolução:
Se f fosse diferenciável em $(0,0)$ então $\partial_{(1,1)} f(0,0) = \nabla_f(0,0).(1,1)$. Pela alínea c) sabemos que $\partial_{(1,1)} f(0,0) = 0$ e $\nabla_f(0,0).(1,1) = (0,1).(1,1) = 0+1 = 1$. Logo, a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

4. Seja f uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ diferenciável tal que, para todo $k \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(k,k) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(k,k) = k+1$. Sendo g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $g(x,y) = f\left(x^2 - xe^y, xy\right)$ calcule o valor de

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0).$$

Resolução:
Sejam u, v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ definidas por $u(x,y) = x^2 - xe^y$ e $v(x,y) = xy$. Começamos por observar que $u(1,0) = 0$ e $v(1,0) = 0$. Então sendo $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ temos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x - e^y$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -xe^y$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = y$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = x$ e particularizando para o ponto $(1,0)$ obtemos
$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(1,0), v(1,0))\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(1,0), v(1,0)\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0).1 + \frac{\partial f}{\partial v}(0,0).0 = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 1$ (por hipótese dada no enunciado) . Analogamente,
$\frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(1,0), v(1,0))\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(1,0), v(1,0)\frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)(-1) + \frac{\partial f}{\partial v}(0,0).1 = 1.(-1) + 1.1 = 0$. Assim conclui-se que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = 1 + 0 = 1.$$

Cotações:

1a)	1b)	2a)	2b)	3a)	3b)	3c)	3d)	4
1,0	1,5	1,5	1,0	1,5	1,0	1,0	0,5	1,0