4.3. Otimização de funções de uma variável

4.3.1. Pontos críticos e extremantes

- Def: Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  f tem um **máximo local** no ponto $x = a$ se $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D_f$.
  Ao ponto a chama-se **ponto de máximo local** ou **maximizante local** de f.

  f tem um **máximo global** no ponto $x = a$ se $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in D_f$.
  Ao ponto a chama-se **ponto de máximo global** ou **maximizante global** de f.

  f tem um **mínimo local** no ponto $x = a$ se $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in V_\varepsilon(a) \cap D_f$.
  Ao ponto a chama-se **ponto de mínimo local** ou **minimizante local** de f.

- Def (cont)

  f tem um **mínimo global** no ponto $x = a$ se $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in D_f$.
  Ao ponto a chama-se **ponto de mínimo global** ou **minimizante global** de f.

- Extremo: máximo ou mínimo (valor da função)
  Extremante: maximizante ou minimizante (ponto onde a função toma o valor max ou mín)
  local: relativo
  global: absoluto

- Notação: neste capítulo, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.

- Def: Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in int(I)$. Se $f'(a) = 0$ então a chama-se **ponto crítico** ou ponto de estacionaridade de f.

- Ex: Determine os pontos críticos de

  a) $f(x) = x^2$

  b) $f(x) = x^3$

  c) $f(x) = x^2 e^x$

- Prop: Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f diferenciável em $int(I)$, $a \in int(I)$.
  Se f tem um extremo local em a então $f'(a) = 0$.

- Obs: $f'(a) = 0 \not\Rightarrow a$ extremante local de f (ex: $f(x) = x^3$).
  Se $f'(a) = 0$ e a não for extremante de f então a chama-se **ponto de sela**.

- Obs: 1) Um ponto crítico ou é extremante ou é um ponto sela.
  2) Qualquer extremante $a \in D_f$ encontra-se num dos 3 conjuntos seguintes:
  i) pontos interiores do D_f e onde a derivada existe (e nesse caso $f'(a) = 0$)
  ii) pontos interiores do domínio e onde a derivada não existe
  ex1) $g(x) = |x|$
  ex2) $h(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{se } x \leq 0 \\ e^x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$
  iii) pontos da fronteira do domínio.

- Dado um ponto crítico, como saber se se trata de um extremante local?

- Prop: (teste da segunda derivada)
  Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalo aberto,
  f com derivadas de ordem 1 e 2 contínuas em I,
  a um ponto crítico de f $(a \in I)$.

Então,

  i) se $f''(a) < 0$, então a é maximizante local de f;
  ii) se $f''(a) > 0$, então a é minimizante local de f.

- Obs: se $f'(a) = f''(a) = 0$, a propriedade anterior não permite concluir se é extremante.

- Ex: a) $f(x) = x^2$
  c) $f(x) = x^2 e^x$
  b) $f(x) = x^3$
  d) $f(x) = x^4$

- Prop: (teste das derivadas de ordem superior)
  Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervalo aberto,
  f com derivadas até à ordem $n \geq 2$, todas elas contínuas em I,
  a um ponto crítico de f $(a \in I)$.
  Seja $k \leq n$ a ordem da primeira das sucessivas derivadas de f que não se anula em a
  (isto é, $f'(a) = 0, \dots, f^{(k-1)}(a) = 0$, e $f^{(k)}(a) \neq 0$).

Então,

  i) se k for ímpar, a não é extremante local de f (a é ponto de sela);
  ii) se k for par e $f^{(k)}(a) < 0$, então a é maximizante local de f;
  iii) se k for par e $f^{(k)}(a) > 0$, então a é minimizante local de f.

- Ex: b) $f(x) = x^3$ e d) $f(x) = x^4$

- TPC: 18 a h i f, 19 d, 20 c d e

4.3.2. Concavidades e inflexões

- Def: $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função convexa** em I se o segmento de reta que une quaisquer dois pontos do gráfico de f estiver acima do gráfico de f entre esses dois pontos;

  $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função côncava** em I se o segmento de reta que une quaisquer dois pontos do gráfico de f estiver abaixo do gráfico de f entre esses dois pontos.

- Ex: 1) $f(x) = x^2$

  2) $f(x) = x^3$

Obs: convexa: concavidade virada para cima

côncava: concavidade virada para baixo.

- Ex: Convexidade (e monotonia) de

  1) $f(x) = e^x$

  2) $f(x) = 1/x,$ se $x > 0$

  3) $f(x) = \ln x$

  4) $f(x) = 1/x,$ se $x < 0$

  5) $f(x) = \sin x$

- Prop: Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f contínua em I e com derivada até à ordem 2 em $int(I)$. Então,

  a) f é convexa em I $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \ \forall x \in I$

  b) f é côncava em I $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0, \ \forall x \in I$.

- Def: $a \in D_f$ é um **ponto de inflexão** se, em a, a função passa de côncava a convexa ou vice-versa.

- Prop: Seja $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com f'' contínua em I e seja $a \in int(I)$.

  a) Se a for ponto de inflexão de f então $f''(a) = 0$;

  b) Se $f''(a) = 0$ e f'' mudar o sinal em a, então a é ponto de inflexão de f.

- Prop: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função convexa em todo o seu domínio,

  então qualquer mínimo local é mínimo global;

  Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função côncava em todo o seu domínio,

  então qualquer máximo local é máximo global.

- TPC: 18 a h i f: os extremantes obtidos são globais?

  21 a b e

- Já podem fazer todos os exercícios do capítulo 4