

Cap5. Cálculo Integral em \mathbb{R}

5.1 Primitivas. Métodos gerais de primitivação

5.1.1 Definições e propriedades

- Def: Seja $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervalo.

Primitiva de f em I é qualquer função $F: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

f é **primitivável** em I se existir pelo menos uma primitiva de f em I ;

Os símbolos

$$Pf(x), F(x) \text{ e } \int f(x)dx$$

designam o conjunto de todas as primitivas de f em I .

\int – símbolo de integral, $f(x)$ – função integranda,

dx – significa que se está a considerar f como função da variável x

1

- Ex: 1) $f(x) = 5 \Rightarrow F(x) = ?$

ou

$$P5 = ?$$

ou

$$\int 5 dx = ?$$

5.1.2 Primitivas imediatas

- Calcule as primitivas de

2) $f(x) = 0$

3) $f(x) = 2x$

4) $f(x) = x$

5) $f(x) = x^2$

6) $f(x) = 1/x^7$

2

$$7) f(x) = (5x + 1)^2$$

$$8) f(x) = e^x$$

$$9) f(x) = e^{2x}$$

$$10) f(x) = 6xe^{3x^2}$$

$$11) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$12) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$13) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(...)

3

Regras de derivação:

$f(x)$	$f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$
$u^k \ (k \in \mathbb{R})$	$ku^{k-1} \cdot u'$
e^u	$u' \cdot e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin u$	$u' \cdot \cos u$
$\cos u$	$-u' \cdot \sin u$
$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$\operatorname{cotg} u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctg u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arccotg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$
$a^u \ (a \in \mathbb{R}^+)$	$u' \cdot a^u \ln a$
$\log_a u \ (a \in \mathbb{R}^+)$	$\frac{u'}{u \ln a}$

Regras de primitivação:

$$P u^a \cdot u' = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$P u' \cdot e^u = e^u + C$$

$$P \frac{u'}{u} = \ln |u| + C$$

$$P u' \cdot \cos u = \sin u + C$$

$$P u' \cdot \sin u = -\cos u + C$$

$$P \frac{u'}{\cos^2 u} = P u' \sec^2 u = \operatorname{tg} u + C$$

$$P \frac{u'}{\sin^2 u} = P u' \operatorname{cosec}^2 u = -\operatorname{cotg} u + C$$

$$P \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

$$P \frac{u'}{1+u^2} = \arctg u + C$$

$$P u' \cdot a^u = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

4

5.1.3 Primitivação por partes

- Vimos até agora primitivas imediatas (e quase imediatas) (que resultam da inversão duma fórmula de derivação).

Mas como calcular $\int x e^x$ ou $\int x \cos x$?

- Obs: $\int f g \neq \int f \times \int g$ (ex $\int x x$)

- Regra da primitivação por partes

$$\int f' g = f g - \int f g'. \quad (P u' v = u v - \int u v')$$

- Ex: 1) $\int x e^x$

7

- Ex 2) $\int x \cos x$

$$3) \int x^2 e^x$$

$$4) \int \ln x$$

$$5) \int e^x \sin x$$

- TPC: 6 b f g i

8