5.1.4 Primitivação por decomposição

Consiste em, antes de primitivar, escrever a função a primitivar como soma de funções mais simples (de primitivar)

- Ex: $\mathrm{P}(x^3+1)^2$

- Caso particular importante: Primitivação de funções racionais $\mathrm{P}\,\frac{P(x)}{Q(x)}$,

  onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios em x.

- Obs: Algumas funções racionais têm primitiva imediata:

  $\mathrm{P}\,\frac{3}{1+x^2}$

  $\mathrm{P}\,\frac{5x}{1+x^2}$

1

$\mathrm{P}\,\frac{1}{1+9x^2}$

$\mathrm{P}\,\frac{x}{1+9x^2}$

$\mathrm{P}\,\frac{1}{1+(x-2)^2}$

$\mathrm{P}\,\frac{x-2}{1+(x-2)^2}$

$\mathrm{P}\,\frac{1}{25+(x-2)^2}$

2

- Como se primitivam funções racionais $\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$, quando a primitiva não é imediata?

Dado $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios em x,

Passo 1: se grau de $Q(x) \leq$ grau de $P(x)$, efetuar a divisão dos polinómios (obtendo uma função racional própria: grau de $Q >$ grau de P)

Passo 2: Se a expressão obtida no passo 1 não tiver primitiva imediata, decompor a função racional própria obtida, $p(x)/q(x)$, em elementos simples

Passo 3: só depois dos passos 1 e 2 se primitiva

- Ex: 1) P $\frac{x^3+4}{x+2}$

1º) $\frac{x^3+4}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x+2}$

2) P $\frac{x^3+4}{x^2+1}$

TPC: efetuar a divisão (solução: $\frac{x^3+4}{x^2+1} = x + \frac{-x+4}{x^2+1}$)

- TPC: 7 abcde

- Vejamos agora como proceder no Passo 2

  Passo 2: Se a expressão obtida no passo 1 não tiver primitiva imediata, decompor a função racional própria obtida, $p(x)/q(x)$, em elementos simples

Teor 1.

Se $q(x)$ tiver **só raízes reais**, $r_1, r_2, \dots, r_k$, com multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_k$, isto é,

se $$q(x) = (x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2} \dots (x-r_k)^{m_k},$$

então existem constantes reais $a_1, \dots, a_{m_1}, b_1, \dots, b_{m_2}, \dots, u_1, \dots, u_{m_k}$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{(x-r_1)^{m_1}} + \frac{a_2}{(x-r_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{a_{m_1}}{x-r_1} +$$
$$\frac{b_1}{(x-r_2)^{m_2}} + \dots + \frac{b_{m_2}}{x-r_2} + \dots + \frac{u_1}{(x-r_k)^{m_k}} + \dots + \frac{u_{m_k}}{x-r_k}$$

5

- Ex: 1) Decomponha em elementos simples

  a) $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$

  b) $\frac{3}{-2x^2-2x+4}$

  c) $\frac{-3x+2}{x^2(x-1)}$

  2) Primitive as funções racionais anteriores.

- TPC: 7 fgh

6

(Passo 2: Se a expressão obtida no passo 1 não tiver primitiva imediata, decompor a função racional própria obtida, $p(x)/q(x)$, em elementos simples)

Teor 2:

Se $q(x)$ tiver $\boldsymbol{k}$ **raízes reais**, $r_1, r_2, \dots, r_k$, com multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_k$,
e $\boldsymbol{n}$ **raízes complexas**, $r_1', r_2', \dots, r_n'$, com multiplicidades $h_1, h_2, \dots, h_n$ isto é , se

$$q(x) = (x - r_1)^{m_1}(x - r_2)^{m_2} \dots (x - r_k)^{m_k}(x - r_1')^{h_1}(x - r_2')^{h_2} \dots (x - r_n')^{h_n},$$

com $r_1' = p_1 + iq_1,\ r_2' = p_2 + iq_2,\ \dots, r_n' = p_n + iq_n$,

então existem constantes reais $a_1, \dots, a_{m_1}, \dots, u_1, \dots, u_{m_k}, a_1', \dots, a_{h_1}', \dots, u_1', \dots, u_{h_n}'$ tais que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{(x - r_1)^{m_1}} + \frac{a_2}{(x - r_1)^{m_1 - 1}} + \dots + \frac{a_{m_1}}{x - r_1} + \dots + \frac{u_1}{(x - r_k)^{m_k}} + \dots + \frac{u_{m_k}}{x - r_k}$$

$$+ \frac{a_1'x + b_1'}{((x - p_1)^2 + q_1^2)^{h_1}} + \frac{a_2'x + b_2'}{((x - p_1)^2 + q_1^2)^{h_1 - 1}} + \dots + \frac{a_{h_1}'x + b_{h_1}'}{(x - p_1)^2 + q_1^2} + \dots$$

$$+ \frac{u_1'x + v_1'}{((x - p_n)^2 + q_n^2)^{h_n}} + \frac{u_2'x + v_2'}{((x - p_n)^2 + q_n^2)^{h_n - 1}} + \dots + \frac{u_{h_n}'x + v_{h_n}'}{(x - p_n)^2 + q_n^2}$$

- Ex: Primitive $f(x) = \frac{x^4+6x+9}{(x^2+3)^2(x-1)}$

- TPC: 7 de i) até ao fim

5.1.5 Primitivação por substituição

Se no integral em ordem a x se substituir x por $g(t)$ então

$$\int f(x)\ dx = \int f\big(g(t)\big)g'(t)\ dt$$

(e depois de calcular a primitiva, é preciso fazer a retrosubstituição para a resposta ser dada em função da variável x)

- Ex: 1) P $\frac{(e^x)^2}{1+e^x}$

  2) P $\frac{e^{3x}}{4+e^{2x}}$

3) P $\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

4) P $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

5) P $\sqrt{1-x^2}$ (sugestão: Faça a substituição $x = \sin t$ e use $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$)

- TPC: 8, 10

  Nota: Ex 9 só depois das primitivas estarem bem treinadas