

Cálculo e Instrumentos Financeiros

Reembolso de Empréstimos

Alfredo D. Egidio dos Reis



4.1 Modalidades

4.2 Quadros de amortização

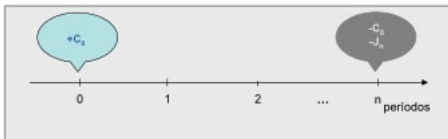
- Capítulo de aplicação dos conceitos e fórmulas dos capítulos anteriores, particularmente das Rendas.
- Um empréstimo é uma dívida, o seu reembolso é o processo de extinção dessa dívida.

Componentes relevantes da dívida e sua resolução:

- 1 O reembolso ou amortização do capital emprestado:
 - Pagamentos escalonados ao longo do prazo. Empréstimos de grandes quantias, e de médio e longo prazo.
 - Pagamento único no final do prazo. Empréstimos de curto prazo e pequenas quantias.
- 2 O pagamento dos juros:
 - Pagamento único: no início do prazo ou no fim;
 - Pagamentos escalonados ao longo do prazo.

Modalidades

- 1 **Modalidade 1:** Reembolso do capital e juros pagos no final;
- 2 **Modalidade 2:** Reembolso do capital de uma só vez e juros pagos no início do empréstimo
- 3 **Modalidade 3:** Reembolso do capital de uma só vez e juros pagos escalonadamente;
- 4 **Modalidade 4:** Reembolso do capital ao longo do prazo e juros pagos no início;
- 5 **Modalidade 5:** Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos no final;
- 6 **Modalidade 6:** Reembolso do capital ao longo do prazo do empréstimo e juros pagos escalonadamente.

Modalidade 1: Reembolso do capital e juros no final

Cálculo do Juro

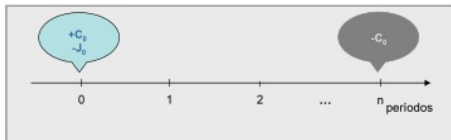
$$C_n = C_0(1 + i)^n = C_0 + J_n$$

$$J_n = C_0(1 + i)^n - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1].$$

Exemplo (Ex. 4.1)

Empréstimo do Sr. Costa de 10 000,00€, prazo 3 anos, $i_A = 0.1$, reembolso e juros pagos no final do prazo. Juros:

$$J_3 = 10000,00(1 + 0,1)^3 - 10000,00 = 3310,00€.$$

Modalidade 2: Reembolso no final e juros no início

Cálculo do Juro

$$C_0 - J_0 = C_0(1 + i)^{-n} \Leftrightarrow C_0 = J_0 + C_0(1 + i)^{-n}$$

$$J_0 = C_0 - C_0(1 + i)^{-n} = C_0 [1 - (1 + i)^{-n}]$$

Exemplo (Ex. 4.2)

*Empréstimo do Sr. Tadeu de €50 000,00 ; Taxa anual: 14% ;
Prazo: 4 anos; Amortização no final; Juros no início:*

$$50000 - J_0 = +50000(1,14)^{-4} \Leftrightarrow J_0 = 20395,99$$

Nota: $J_0 = C_0 [1 - (1 + i)^{-n}]$ e seja $n = 1$, 1 ano:

$$\begin{aligned} J_0 &= C_0 \left[1 - \frac{1}{1+i} \right] = C_0 \frac{i}{1+i} \\ &= C_0 d \end{aligned}$$

O juro cobrado por ano é juro de desconto, com uma taxa de desconto $d = \frac{i}{(1+i)}$.

Modalidade 3: Reembolso no final; juros ao longo do prazo

Cálculo simples, sem *acumulação* de juro (igual a regime simples):

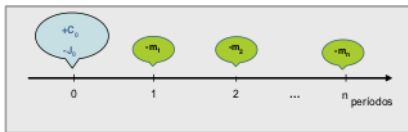
- ① Prestações de juros, prestações normais: $j = C_0 \cdot i$.
- ② Se forem antecipadas: $j = \frac{C_0 \cdot i}{1+i} = C_0 \cdot d$.

Exemplo (Ex. 4.3)

Empréstimo de €30 000,00; Prazo 4 semestres, $i_s = 0.04$;

Pagamento semestral de juros, reembolso no final.

- *Juro semestral: $j = 30000 \times 0,04 = 1200,00€$*
- *Juros em renda inteira postecipada, $n = 4$. Capital no fim.*

Modalidade 4: Reembolsos escalonados; Juros no início

- 1 Amortizações constantes, renda com termo: $m_i = m = \frac{C_0}{n}$, $i = 1, \dots, n$
- 2 Juros pagos no início:

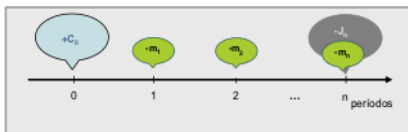
$$C_0 - J_0 = m \cdot a_{\overline{n}|i} \Leftrightarrow J_0 = C_0 \left(1 - \frac{1}{n} a_{\overline{n}|i}\right)$$

Exemplo (Ex. 4.4)

Empréstimo de 40 000,00€, prazo de 4 anos e tx juro anual de 10%. Juros todos no início e reembolso em 4 partes iguais e anuais:

$$m_i = 10000,00\text{€}, i = 1, \dots, 4;$$

$$J_0 = 40000 - 10000 a_{\overline{4}|10\%} = 8301,35.$$

Modalidade 5: Reembolsos escalonados; Juros no final

- 1 Reembolsos de Capital constantes, renda com termo:
 $m_i = m = C_0/n, i = 1, \dots, n.$
- 2 Juros pagos no fim (da Mod.4 mas capitalizado ao fim):

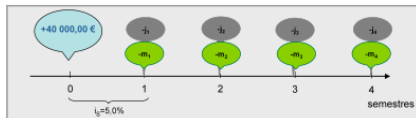
$$C_0 = m \cdot a_{\overline{n}|i} + J_n (1 + i)^{-n};$$

$$J_n = (C_0 - m \cdot a_{\overline{n}|i}) (1 + i)^n = C_0 \left(1 - \frac{1}{n} a_{\overline{n}|i} \right) (1 + i)^n.$$

Exemplo (Ex. 4.5)

Empréstimo: €60 000,00; 4 anos; $i_A = 12\%$; $m = 15000,00€$;

$$60000 = 15000 a_{\overline{4}|12\%} + J_n (1, 12)^{-4} \Leftrightarrow J_n = 22721,24€.$$

Modalidade 6: Reembolsos e juros pagos ao longo do prazo

- 1 **Modalidade 6.1:** Reembolso de Capital constante; ou
- 2 **Modalidade 6.2** Prestação total (Juros + Capital) constante.

Modalidade 6.1: Reembolso de Capital constante, m_k

$$m_k = m = C_0/n, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$T_k = m + j_k \text{ Prestação a pagar em } k$$

$$C_{k-1} = C_0 - (k-1)m, \text{ Dívida início ano } k$$

$$j_k = C_{k-1}i = [C_0 - (k-1)m]i$$

Nota: O juro do ano é totalmente pago, o restante é amortização.

Modalidade 6.1: Reembolso constante de capital

Quadro de Amortização

Período	Capital em dívida no início	Juro a pagar no fim do período	Prestação	Amortização final período	Amortizações acumuladas	Capital em dívida no final
1	C_0	j_1	T_1	m	m	C_1
2	C_1	j_2	T_2	m	$2m$	C_2
3	C_2	j_3	T_3	m	$3m$	C_3
4	C_3	j_4	T_4	m	$4m$	C_4
...
n	$C_{n-1} = m_n$	j_n	T_n	m	$n.m$	C_n

Exemplo (Ex. 4.6, $i_S = 0,05$)

Período (k)	Capital em Dívida no Início (C_{k-1})	Juro a pagar Fim do Período (j_k)	Prestação (T_k)	Amortização Final Período (m_k)	Amortizações Acumuladas (M_k)	Capital em Dívida no Final (C_k)
1	40 000,00	2 000,00	12 000,00	10 000,00	10 000,00	30 000,00
2	30 000,00	1 500,00	11 500,00	10 000,00	20 000,00	20 000,00
3	20 000,00	1 000,00	11 000,00	10 000,00	30 000,00	10 000,00
4	10 000,00	500,00	10 500,00	10 000,00	40 000,00	0,00

Modalidade 6.2: Prestação constante (Capital + Juros)

- 1 Cálculo da prestação anual, termo da renda:

$$C_0 = T \times a_{\overline{n}|i}$$

- 2 Prestação a pagar no período k ($k = 1, \dots, n$):

$$T_k = T = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}}$$

- 3 Juro a pagar no período k : $j_k = C_{k-1}i$
 4 Amortização no período k : $m_k = T - j_k$
 5 Amortização acumulada em k :

$$M_k = M_{k-1} + m_k,$$

- 6 Capital em dívida no final do período k :

$$C_k = C_0 - M_k = C_{k-1} - m_k$$

Modalidade 6.2: Prestação constante

Quadro de Amortização

Período	Capital em Dívida no Início	Juro a pagar no Fim do Período	Prestação	Amortização Final Período	Amortizações acumuladas	Capital em Dívida no Final
1	C_0	j_1	T	m_1	M_1	C_1
2	C_1	j_2	T	m_2	M_2	C_2
3	C_2	j_3	T	m_3	M_3	C_3
4	C_3	j_4	T	m_4	M_4	C_4
...
N	$C_{n-1} = m_n$	j_n	T	m_n	M_n	C_n

Modalidade 6.2: Prestação constanteExemplo (Ex. 4.7, $i_s = 0,05$)*Termo da renda:* $T = 40000 / a_{\overline{4}|5\%} = 11\,280,47\text{€}$.

Período (k)	Capital em Dívida no Início (C_{k-1})	Juro a pagar Fim do Período (j_k)	Prestação (T_k)	Amortização Final Período (m_k)	Amortizações Acumuladas (M_k)	Capital em Dívida no Final (C_k)
1	40 000,00	2 000,00	11 280,47	9 280,47	9 280,47	30 719,53
2	30 719,53	1 535,98	11 280,47	9 744,50	19 024,96	20 975,03
3	20 975,03	1 048,75	11 280,47	10 231,72	29 256,68	10 743,31
4	10 743,31	537,17	11 280,47	10 743,31	40 000,00	0,00

4. Reembolso de empréstimos

4.1 Modalidades de reembolso de capital e pagamento de juros

4.2 Quadros de amortização